# 第一章　集合与映射

## 习　题　1.1　集合

1. 证明由$n$个元素组成的集合$T=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$有$2^n$个子集。

**解**　由$k$个元素组成的子集的个数为$C_n^k$，$\sum_{k=0}^{n}C_n^k=(1+1)^n=2^n$。

2. 证明：

(1) 任意无限集必包含一个可列子集；

(2) 设$A$与$B$都是可列集，证明$A\cup B$也是可列集。

**证**（1）设$T$是一个无限集，先取$a_1\in T$。由于$T$是无限集，必存在$a_2\in T$，$a_2\neq a_1$。再由$T$是无限集，必存在$a_3\in T$，$a_3\neq a_1$，$a_3\neq a_2$。这样的过程可以无限进行下去，于是得到可列集$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$S\subset T$。

（2）设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，则$A\cup B$可表示为

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}。$$

3. 指出下列表述中的错误：

(1) $\{0\}=\varnothing$；

(2) $a\subset\{a,b,c\}$；

(3) $\{a,b\}\in\{a,b,c\}$；

(4) $\{a,b,\{a,b\}\}=\{a,b\}$。

**解**　（1）$\{0\}$是由元素$0$构成的集合，不是空集。

（2）$a$是集合$\{a,b,c\}$的元素，应表述为$a\in\{a,b,c\}$。

（3） $\{a,b\}$是集合$\{a,b,c\}$的子集，应表述为$\{a,b\}\subset\{a,b,c\}$。

（4） $\{a,b,\{a,b\}\}$ 是由 $a,b$ 和 $\{a,b\}$ 为元素构成的集合，所以

$\{a,b,\{a,b\}\}\supset\{a,b\}$，但$\{a,b,\{a,b\}\}\neq\{a,b\}$。

4. 用集合符号表示下列数集：

(1) 满足$\dfrac{x-3}{x+2}\le 0$的实数全体；

(2) 平面上第一象限的点的全体；

(3) 大于 0 并且小于 1 的有理数全体；

(4) 方程$\sin x\cot x=0$的实数解全体。

解（1） $\{x\mid -2<x\le 3\}$。

（2） $\{(x,y)\mid x>0且y>0\}$。

（3） $\{x\mid 0<x<1且x\in Q\}$。

（4） $\left\{x\mid x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$。

5. 证明下列集合等式：

(1) $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$；

(2) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$。

证（1）设$x\in A\cap(B\cup D)$，则$x\in A$，并且或者$x\in B$，或者$x\in D$。于是或者$x\in A\cap B$，或者$x\in A\cap D$，即$x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，因此

$$A\cap(B\cup D)\subset(A\cap B)\cup(A\cap D)；$$

设$x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，则或者$x\in A\cap B$，或者$x\in A\cap D$。于是$x\in A$，并且或者$x\in B$，或者$x\in D$，即$x\in A\cap(B\cup D)$，因此

$$A\cap(B\cup D)\supset(A\cap B)\cup(A\cap D)。$$

（2）设 $x\in(A\cup B)^C$，则 $x\bar{\in}A\cup B$，即 $x\bar{\in}A$ 且 $x\bar{\in}B$，于是 $x\in A^C\cap B^C$，因此

$$(A\cup B)^C\subset A^C\cap B^C\text{；}$$

设 $x\in A^C\cap B^C$，则 $x\bar{\in}A$ 且 $x\bar{\in}B$，即 $x\bar{\in}A\cup B$，于是 $x\in(A\cup B)^C$，因此

$$(A\cup B)^C\supset A^C\cap B^C\text{。}$$

6. 举例说明集合运算不满足消去律：

(1) $A\cup B=A\cup C$ ≠> $B=C$；

(2) $A\cap B=A\cap C$ ≠> $B=C$。

其中符号“ ≠> ”表示左边的命题不能推出右边的命题。

解 （1）设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，$C=\{c,d\}$，则 $A\cup B=A\cup C$，但 $B\neq C$。

（2）设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{c,d,e\}$，$C=\{c,d\}$，则 $A\cap B=A\cap C$，但 $B\neq C$。

7. 下述命题是否正确?不正确的话，请改正。

(1) $x\bar{\in}A\cap B \Leftrightarrow x\bar{\in}A$ 并且 $x\bar{\in}B$；

(2) $x\bar{\in}A\cup B \Leftrightarrow x\bar{\in}A$ 或者 $x\bar{\in}B$。

解（1）不正确。$x\bar{\in}A\cap B \Leftrightarrow x\bar{\in}A$ 或者 $x\bar{\in}B$。

（2）不正确。$x\bar{\in}A\cup B \Leftrightarrow x\bar{\in}A$ 并且 $x\bar{\in}B$。

# 习　题 1.2　映射与函数

1. 设 $S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $T=\{a,b,c\}$，问有多少种可能的映射 $f\ :S\to T$？其中哪些是双射?

**解** 有 $3^3=27$ 种可能的映射，其中有 $3!=6$ 种是双射，它们是

$$f:\begin{cases}\alpha\mapsto a\\ \beta\mapsto b\\ \gamma\mapsto c\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto a\\ \beta\mapsto c\\ \gamma\mapsto b\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto b\\ \beta\mapsto c\\ \gamma\mapsto a\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto b\\ \beta\mapsto a\\ \gamma\mapsto c\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto c\\ \beta\mapsto a\\ \gamma\mapsto b\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto c\\ \beta\mapsto b\\ \gamma\mapsto a\end{cases}。$$

2. (1) 建立区间 $[\,a,\ b\,]$ 与 $[\,0,\ 1\,]$ 之间的一一对应；

   (2) 建立区间 $(\,0,\ 1\,)$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 之间的一一对应。

**解**（1） $f:[a,b]\to[0,1]$

$$x\mapsto y=\frac{x-a}{b-a}\ ;$$

（2） $f:(0,1)\to(-\infty,+\infty)$

$$x\mapsto \tan(x-\frac{1}{2})\pi=-\cot(\pi x)。$$

3. 将下列函数 $f$ 和 $g$ 构成复合函数，并指出定义域与值域：

(1) $y=f(u)=\log_a u$， $u=g(x)=x^2-3$；

(2) $y=f(u)=\arcsin u$， $u=g(x)=\mathrm{e}^x$ ；

(3) $y=f(u)=\sqrt{u^2-1}$, $u=g(x)=\sec x$ ；

(4) $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$。

**解**（1） $y=\log_a(x^2-3)$，定义域：$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，值域：$(-\infty,+\infty)$；

（2） $y=\arcsin 3^x$，定义域：$\left(-\infty,0\right]$，值域：$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$；

（3） $y=\left|\tan x\right|$，定义域：$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，值域：$\left[0,+\infty\right)$；

（4） $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$，定义域：$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$，值域：$[0,1)\cup(1,+\infty)$。

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的：

(1) $y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (2) $y=\frac{1}{3}\log_a{}^3(x^2-1)$。

解（1） $y=\arcsin u$， $u=\frac{1}{\sqrt{v}}$， $v=x^2+1$ ；

（2） $y=\frac{1}{3}u^3$， $u=\log_a v$， $v=x^2-1$。

5. 求下列函数的自然定义域与值域：

(1) $y=\log_a \sin x$ （$a>1$）；

(2) $y=\sqrt{\cos x}$ ；

(3) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$ ；

(4) $y=x^2+\frac{1}{x^4}$。

解（1）定义域：$\bigcup_{k\in Z}(2k\pi,(2k+1)\pi)$，值域：$(-\infty,0]$；

（2）定义域：$\bigcup_{k\in Z}\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，值域：$[0,1]$；

（3）定义域：$[-4,1]$，值域：$\left[0,\frac{5}{2}\right]$；

（4）定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域：$\left[\frac{3\sqrt[3]{2}}{2},+\infty\right)$。

6. 问下列函数 $f$ 和 $g$ 是否等同？

(1) $f(x)=\log_a(x^2)$， $g(x)=2\log_a x$ ；

(2) $f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$， $g(x)=1$ ；

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $g(x)=1$。

解 （1）函数 $f$ 和 $g$ 不等同；

（2）函数 $f$ 和 $g$ 不等同；

（3）函数 $f$ 和 $g$ 等同。

7. (1) 设 $f(x+3)=2x^3-3x^2+5x-1$,求 $f(x)$ ；

(2) 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$,求 $f(x)$。

解（1）令 $x+3=t$，则 $x=t-3$，代入等式，得到

$$f(t)=2(t-3)^3-3(t-3)^2+5(t-3)-1=2t^3-21t^2+77t-97,$$

所以 $f(x)=2x^3-21x^2+77x-97$ ；

（2）令 $\dfrac{x}{x-1}=t$，则 $x=\dfrac{t}{t-1}$，代入等式，得到

$$f(t)=\frac{\dfrac{3t}{t-1}-1}{\dfrac{3t}{t-1}+1}=\frac{2t+1}{4t-1}$$，所以 $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x-1}$。

8. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求 $f\circ f$， $f\circ f\circ f$, $f\circ f\circ f\circ f$ 的函数表达式。

解（1） $f\circ f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ ；

$f\circ f\circ f(x)=\dfrac{x+2}{2x+3}$ ；

$f\circ f\circ f\circ f(x)=\dfrac{2x+3}{3x+5}$。

9. 证明：定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和。

证　显然 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数， $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数，而

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}。$$

10. 写出折线 $\overline{ABCD}$ 所表示的函数关系 $y=f(x)$ 的分段表示，其中

$A=(0,3)$， $B=(1,-1)$， $C=(3,2)$， $D=(4,0)$。

解　$y=\begin{cases}-4x+3 & x\in[0,1]\\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2} & x\in(1,3]\\ -2x+8 & x\in(3,4]\end{cases}$。

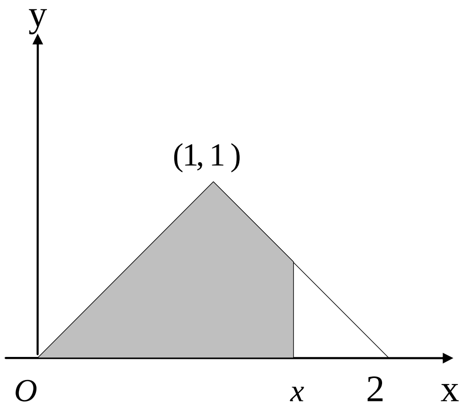



图 1.2.8

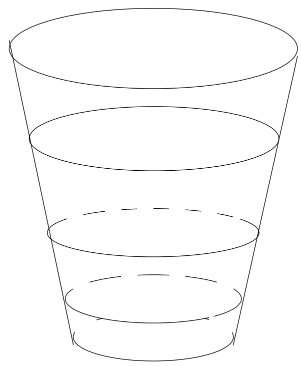


图 1.2.9

11. 设 $f(x)$ 表示图1.2.8中阴影部分面积，写出函数 $y=f(x)$，$x\in[0,\ 2]$ 的表达式。

解　$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & x\in[0,1]\\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-1 & x\in(1,2]\end{cases}$。

12. 一玻璃杯装有汞、水、煤油三种液体，比重分别为13.6，1，0.8克／厘米$^3$(图1.2.9)，上层煤油液体高度为5厘米，中层水液体高度为4厘米，下层汞液体高度为2厘米，试求压强 $P$ 与液体深度 $x$ 之间的函数关系。

解　$P(x)=\begin{cases}78.4x & x\in[0,5]\\ 98x-98 & x\in(5,9]\\ 1332.8x-11211.2 & x\in(9,11]\end{cases}$。

13. 试求定义在$[0,\ 1]$上的函数，它是$[0,\ 1]$与$[0,\ 1]$之间的一一对应，

但在$[0, 1]$的任一子区间上都不是单调函数。

**解** $f(x)=\begin{cases} x & x\text{为有理数} \\ 1-x & x\text{为无理数} \end{cases}$。

# 第二章　数列极限

## 习　题 2.1　实数系的连续性

1.　(1) 证明$\sqrt{6}$不是有理数；

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$是不是有理数?

**证**（1）反证法。若$\sqrt{6}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{6}=\dfrac{m}{n}$。由$m^2=6n^2$，可知$m$是偶数，设$m=2k$，于是有$3n^2=2k^2$，从而得到$n$是偶数，这与$\dfrac{m}{n}$是既约分数矛盾。

（2）$\sqrt{3}+\sqrt{2}$不是有理数。若$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$，于是$3+2\sqrt{6}+2=\dfrac{m^2}{n^2}$，$\sqrt{6}=\dfrac{m^2}{2n^2}-\dfrac{5}{2}$，即$\sqrt{6}$是有理数，与（1）的结论矛盾。

2. 求下列数集的最大数、最小数，或证明它们不存在：

$A=\{x\,|\,x\ge 0\}$；

$B=\left\{\sin x\,|\;0<x<\dfrac{2\pi}{3}\right\}$；

$C=\left\{\dfrac{n}{m}\,\middle|\;m,n\in\mathbf{N}^+\text{并且}n<m\right\}$。

**解**　$\min A=0$；因为$\forall x\in A$，有$x+1\in A$，$x+1>x$，所以$\max A$不存在。

$\max B=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；因为$\forall x\in B$，$\exists\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，使得$x=\sin\alpha$，于是有$\sin\dfrac{\alpha}{2}\in B$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}<x$，所以$\min B$不存在。

$\max C$与$\min C$都不存在，因为$\forall \frac{n}{m} \in C$，有$\frac{n}{m+1} \in C$，$\frac{n+1}{m+1} \in C$，$\frac{n}{m+1} < \frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$，所以$\max C$与$\min C$都不存在。

3. $A, B$是两个有界集，证明：

(1) $A \cup B$是有界集；

(2) $S = \{x + y | x \in A, y \in B\}$也是有界集。

**证** （1）设$\forall x \in A$，有$|x| \le M_1$，$\forall x \in B$，有$|x| \le M_2$，则$\forall x \in A \cup B$，有$|x| \le \max\{M_1, M_2\}$。

（2）设$\forall x \in A$，有$|x| \le M_1$，$\forall x \in B$，有$|x| \le M_2$，则$\forall x \in S$，有$|x| \le M_1 + M_2$。

4. 设数集$S$有上界，则数集$T = \{x | -x \in S\}$有下界，且$\sup S = -\inf T$。

**证** 设数集$S$的上确界为$\sup S$，则对任意$x \in T = \{x | -x \in S\}$，有$-x \le \sup S$，即$x \ge -\sup S$；同时对任意$\varepsilon > 0$，存在$y \in S$，使得$y > \sup S - \varepsilon$，于是$-y \in T$，且$-y < -\sup S + \varepsilon$。所以$-\sup S$为集合$T$的下确界，即$\inf T = -\sup S$。

5. 证明有界数集的上、下确界唯一。

**证** 设$\sup S$既等于$A$，又等于$B$，且$A < B$。取$\varepsilon = \frac{B - A}{2} > 0$，因为$B$为集合$S$的上确界，所以存在$x \in S$，使得$x > B - \varepsilon > A$，这与$A$为集合$S$的上确界矛盾，所以$A = B$，即有界数集的上确界唯一。同理可证有界数集的下确界唯一。

6. 对任何非空数集$S$，必有$\sup S \ge \inf S$。当$\sup S = \inf S$时，数集$S$有什么特点?

**解** 对于任意的$x \in S$，有$\inf S \le x \le \sup S$，所以$\sup S \ge \inf S$。当$\sup S = \inf S$时，数集$S$是由一个实数构成的集合。

7. 证明非空有下界的数集必有下确界。

**证** 参考定理2.1.1的证明。

8. 设$S=\{x|\ x\in\mathbf{Q}并且x^2<3\}$，证明：

(1) $S$没有最大数与最小数；

(2) $S$在$\mathbf{Q}$内没有上确界与下确界。

**证** （1） $\forall\frac{q}{p}\in S$，$\frac{q}{p}>0$，则$\left(\frac{q}{p}\right)^2<3$，$\frac{q}{p}<2$。取有理数$r>0$充分小，使得$r^2+4r<3-\left(\frac{q}{p}\right)^2$，于是$\left(\frac{q}{p}+r\right)^2=\left(\frac{q}{p}\right)^2+r^2+\frac{2q}{p}r<\left(\frac{q}{p}\right)^2+r^2+4r<3$，即$\frac{q}{p}+r\in S$，所以$S$没有最大数。同理可证$S$没有最小数。

（2）反证法。设$S$在$\mathbf{Q}$内有上确界，记$\sup S=\frac{n}{m}$ （$m,n\in\mathbf{N}^+$且$m,n$互质），则显然有$0<\frac{n}{m}<2$。由于有理数平方不能等于3，所以只有两种可能：

(i) $\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$，由(1)可知存在充分小的有理数$r>0$，使得$\left(\frac{n}{m}+r\right)^2<3$，这说明$\frac{n}{m}+r\in S$，与$\sup S=\frac{n}{m}$矛盾；

(ii) $\left(\frac{n}{m}\right)^2>3$，取有理数$r>0$充分小，使得$4r-r^2<\left(\frac{n}{m}\right)^2-3$，于是$\left(\frac{n}{m}-r\right)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{2n}{m}r+r^2>\left(\frac{n}{m}\right)^2-4r+r^2>3$，这说明$\frac{n}{m}-r$也是$S$的上界，与$\sup S=\frac{n}{m}$矛盾。所以$S$没有上确界。

同理可证$S$没有下确界。

# 习　题　2.2　数列极限

1. 按定义证明下列数列是无穷小量：

(1) $\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$；　　(2) $\{(-1)^n(0.99)^n\}$；

(3) $\left\{\dfrac{1}{n}+5^{-n}\right\}$；　　(4) $\left\{\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right\}$；

(5) $\left\{\dfrac{n^2}{3^n}\right\}$；　　(6) $\left\{\dfrac{3^n}{n!}\right\}$；

(7) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$；　　(8) $\left\{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right\}$。

证　(1) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<2)$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，成立 $0<\dfrac{n+1}{n^2+1}<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$。

(2) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取 $N=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|(-1)^n(0.99)^n\right|<(0.99)^{\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}}=\varepsilon\text{。}$$

(3) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<2)$，取 $N_1=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N_1$ 时，成立 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$；取 $N_2=\left[\log_5\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N_2$ 时，成立 $5^{-n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$；则当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时，成立 $\left|\dfrac{1}{n}+5^{-n}\right|<\varepsilon$。

(4) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$0<\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}=\frac{n+1}{2n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon\text{。}$$

(5) 当 $n>11$ 时，有 $\dfrac{n^2}{3^n}=\dfrac{n^2}{(1+2)^n}<\dfrac{n^2}{2^3C_n^3}=\dfrac{6n}{8(n-1)(n-2)}<\dfrac{1}{n}$。于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{11,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，成立 $0<\dfrac{n^2}{3^n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$。

(6) 当$n>5$，有$\frac{3^n}{n!}\le\frac{3^5}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$。于是$\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<3)$，取

$N=5+\left[\frac{\lg\frac{\varepsilon}{3}}{\lg\frac{1}{2}}\right]$，当$n>N$时，成立$0<\frac{3^n}{n!}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}<\varepsilon$。

(7) 记$\frac{n}{2}$的整数部分为$m$，则有$\frac{n!}{n^n}<\left(\frac{1}{2}\right)^m$。$\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取

$N=2\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg\frac{1}{2}}\right]+4$，当$n>N$时，有$m>\frac{N}{2}-1>\frac{\lg\varepsilon}{\lg\frac{1}{2}}$，于是成立

$0<\frac{n!}{n^n}<\left(\frac{1}{2}\right)^m<\varepsilon$。

(8) 首先有不等式$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}$。$\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$。

2. 按定义证明下述极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+2}=\frac{2}{3}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,其中$x_n=\begin{cases}\frac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{是偶数}，\\ 1-10^{-n}, & n\text{是奇数}，\end{cases}$。

证 (1) $\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\frac{2n^2-1}{3n^2+2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n^2+2)}<\frac{1}{n^2}<\varepsilon。$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\frac{1}{2n}<\varepsilon。$$

（3） $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{8\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|(\sqrt{n^2+n}-n)-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(\sqrt{n^2+n}+n)^2}<\frac{1}{8n}<\varepsilon。$$

（4）令 $\sqrt[n]{3n+2}=1+a_n$，则 $a_n>0$，$3n+2=(1+a_n)^n>1+C_n^2a_n^2$。当 $n>3$ 时，有 $a_n<\sqrt{\frac{2(3n+1)}{n(n-1)}}<\frac{3}{\sqrt{n}}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{9}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|\sqrt[n]{3n+2}-1\right|=a_n<\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon。$$

（5） $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取 $N=\max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right],\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，若 $n$ 是偶数，则成立 $|x_n-1|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$；若 $n$ 是奇数，则成立 $|x_n-1|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$。

3. 举例说明下列关于无穷小量的定义是不正确的：

(1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N$，使当 $n>N$ 时成立 $x_n<\varepsilon$；

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在无穷多个 $x_n$,使｜$x_n$｜＜ε。

解　（1）例如 $x_n=-n$，则 $\{x_n\}$ 满足条件，但不是无穷小量。

（2）例如 $x_n=\begin{cases}n & n\text{是奇数}\\ \frac{1}{n} & n\text{是偶数}\end{cases}$，则 $\{x_n\}$ 满足条件，但不是无穷小量。

4. 设 $k$ 是一正整数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$。

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，成立 $|x_n-a|<\varepsilon$，于是也成立 $|x_{n+k}-a|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$；

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N'$，$\forall n>N'$，成立 $|x_{n+k}-a|<\varepsilon$，取

$N = N'+k$，则$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

5. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

**证** 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，可知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1$，$\forall n > N_1$，成立$|x_{2n} - a| < \varepsilon$；$\exists N_2$，$\forall n > N_2$，成立$|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$。于是取$N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$，$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon$。

6. 设$x_n \ge 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ge 0$,证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$。

**证** 首先有不等式$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \le \sqrt{|x - a|}$。由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，可知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon^2$，于是$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a_n}\right| \le \sqrt{|x_n - a_n|} < \varepsilon$。

7. $\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$是有界数列，证明$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

**证** 设对一切$n$，$|y_n| \le M$。因为$\{x_n\}$是无穷小量，所以$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，成立$|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$。于是$\forall n > N$，成立$|x_n y_n| < \varepsilon$，所以$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

8. 利用夹逼法计算极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$。

**解**（1）由$1 < \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1。$$

(2) 由 $\frac{n}{n+\sqrt{n}}<\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)<\frac{n}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1。$$

（3）由 $2=\frac{2n+2}{n+1}<\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2n+2}{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=2$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2。$$

（4）应用不等式 $2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$，得到 $0<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0。$$

9. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\frac{n\pi}{2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\lg n}$；

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$。

解（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=3$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{1}{2}$。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{n^3}{3^n}}{3\left[1+\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\right]}=\dfrac{1}{3}$。

（4）因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1$，$|\sin\dfrac{n\pi}{2}|\le 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\frac{n\pi}{2}=0。$$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$。

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}[n^2+1-(n+1)^2]}{(\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n\sqrt{n}}{(\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{(\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}})(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1+\dfrac{1}{n})}=-\frac{1}{2}。$$

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg 1+\lg\dfrac{1}{2}+\cdots+\lg\dfrac{1}{n}}{n}=-\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0。$$

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}。$$

（9）$1<\sqrt[n]{n\lg n}<\sqrt[n]{n^2}$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\lg n}=1。$$

（10）设 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则 $2x_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，两式相减，得到 $x_n=1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}})-\frac{2n-1}{2^n}$。由

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}})=2$，$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3。$$

10. 证明：若 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

证 取 $1<r<l$，由 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，可知 $\exists N,\forall n>N$，成立 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>r>1$，于是 $0<a_n<a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}$。由 $\lim_{n\to\infty}\left\{a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}\right\}=0$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0。$$

11．证明：若 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$。

证　由 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}$ 及 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a。$$

12. 设 $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=0$；

(2) $\lim_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0$　$(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$。

解（1）设$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a$，则由$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}[\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}S_k]=a-a=0。$$

（2）由$0<(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)$与（1），即得到

$$\lim_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0。$$

13. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

证　令$a_n=a+\alpha_n, b_n=b+\beta_n$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$。设$\forall n\in\mathrm{N}^+$，$|\beta_n|\le M$。因为

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab+\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}，$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k\beta_{n-k+1}|\le\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|，$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k=0$，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

14. 设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$　$(-\infty<a<+\infty)$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0。$$

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1})=a$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n})=0。$$

# 习 题 2.3 无穷大量

1. 按定义证明下述数列为无穷大量：

(1) $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right\}$；　　(2) $\left\{\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ $(a>1)$；

(3) $\{n-\arctan n\}$；　　(4) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right\}$。

证（1） $\forall G>0$，取 $N=[3G]$，当 $n>N$ 时，成立 $\left|\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right|>\dfrac{n}{3}>G$。

（2） $\forall G>0$，取 $N=[a^G]$，当 $n>N$ 时，成立 $\left|\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|=\log_a n>G$。

（3） $\forall G>0$，取 $N=[G+\dfrac{\pi}{2}]$，当 $n>N$ 时，成立 $|n-\arctan n|>G$。

（4） $\forall G>0$，取 $N=[2G^2]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|>\frac{n}{\sqrt{2n}}>G。$$

2. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$(或 $-\infty$)，按定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty(\text{或}-\infty);$$

(2) 设 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ，利用（1）证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0。$$

证（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则 $\forall G>0,\exists N_1>0,\forall n>N_1:a_n>3G$。对固定的 $N_1$，$\exists N>2N_1,\forall n>N:\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\dfrac{G}{2}$，于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}-\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|>\frac{3G}{2}-\frac{G}{2}=G。$$

同理可证当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ 时，成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=-\infty$。

（2） $\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty$，可知

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=-\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0。$$

3. 证明：

(1) 设$\{x_n\}$是无穷大量，$|y_n|\geq\delta>0$，则$\{x_n y_n\}$是无穷大量；

(2) 设$\{x_n\}$是无穷大量，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$，则$\{x_n y_n\}$与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

证 （1）因为$\{x_n\}$是无穷大量，所以$\forall G>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，成立$|x_n|>\dfrac{G}{\delta}$。于是$\forall n>N$，成立$|x_ny_n|>G$，所以$\{x_n y_n\}$也是无穷大量。

（2）由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$，可知$\exists N'$，$\forall n>N'$，成立$\dfrac{|b|}{2}\leq|y_n|\leq 2|b|$。因为$\{x_n\}$是无穷大量，所以$\forall G>0$，$\exists N''$，$\forall n>N''$，成立$|x_n|>\max\left\{\dfrac{2G}{|b|},2|b|G\right\}$。取$N=\max\{N',N''\}$，$\forall n>N$，成立$|x_ny_n|>G$与$\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right|>G$，所以$\{x_n y_n\}$与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

4. (1) 利用 Stolz 定理，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\frac{4}{3}；$$

(2) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]$。

解（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n^3-(n-1)^3}=\dfrac{4}{3}$。

（2）$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\frac{4}{3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3[1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2]-4n^3}{3n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2n+1)^2-4n^3+4(n-1)^3}{3n^2-3(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{24n-1}{6n-3}=4$。

5. 利用 Stolz 定理，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0 \quad (a>1)$；

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 \quad (a>1$，$k$是正整数)。

证 （1）$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=\lim_{n\to\infty}\log_a\frac{n}{n-1}=0$。

（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k-(n-1)^k}{a^n-a^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}$，

其中$P_{k-1}(n)$为关于$n$的$k-1$次多项式；重复上述过程$k$次即得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{k-2}(n)}{a^{n-2}(a-1)^2}=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{P_0(n)}{a^{n-k}(a-1)^k}=0。$$

6. (1) 在 Stolz 定理中，若$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$，能否得出$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$的结论?

(2) 在 Stolz 定理中，若$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$不存在，能否得出$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$不存在的结论?

解 （1）不能。考虑例子$x_n=(-1)^n n$，$y_n=n$，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{1}=\infty$， 但 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$极限不存在。

（2）不能。考虑例子$x_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n, y_n=n^2$，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$极限不存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0$。

7. 设 0＜λ＜1，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\frac{a}{1-\lambda}。$$

证 记$k=\lambda^{-1}$，则$a_n+\lambda a_{n-1}+\cdots+\lambda^n a_0=\dfrac{k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_0}{k^n}$，利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_0}{k^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n a_n}{k^{n-1}(k-1)}=\frac{a}{1-\lambda}。$$

8. 设$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，当$n\to\infty$时有极限。$\{p_n\}$为单调递增的正数数列，且

$p_n\to+\infty\ (n\to\infty)$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0\ 。$$

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，作代换$a_k=A_k-A_{k-1}$，得到

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=A_n-\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n},$$

对上式求极限，在求后一分式的极限时应用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}A_n-\lim_{n\to\infty}\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n}$$

$$=A-\lim_{n\to\infty}\frac{A_n(p_n-p_{n-1})}{p_n-p_{n-1}}=A-A=0。$$

# 习　题 2.4　收敛准则

1．　利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$。

解（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}\right]=\frac{1}{e}$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]=e$。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$。

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=1$。

（5）当$n\ge 2$时，有

$$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n。$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n=e$与$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=e$。

2. 利用单调有界数列必定收敛的性质，证明下述数列收敛，并求出极限：

(1) $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$；

(2) $x_1=\sqrt{2}$ , $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ ， $n=1,2,3,\cdots$ ；

(3) $x_1=\sqrt{2}$ , $x_{n+1}=\dfrac{-1}{2+x_n}$ , $n=1,2,3,\cdots$ ；

(4) $x_1=1$， $x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}$ , $n=1,2,3,\cdots$ ；

(5) $0<x_1<1$， $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$ , $n=1,2,3,\cdots$ ；

(6) $0<x_1<1$, $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$, $n=1,2,3,\cdots$ 。

解 （1）首先有 $0<x_1=\sqrt{2}<2$ ，设 $0<x_k<2$ ，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<2$ ，由数学归纳法可知 $\forall n$ ， $0<x_n<2$ 。由

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}},$$

可知数列 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 保持同号；再由 $x_2-x_1>0$ ，可知 $\forall n$ ， $x_{n+1}-x_n>0$ ，所以 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ，对等式 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 两端求极限，得到方程 $a=\sqrt{2+a}$ ，解此方程，得到 $a=2$ ，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2。$$

（2）首先有 $0<x_1=\sqrt{2}<2$ ，设 $0<x_k<2$ ，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{2x_k}<2$ ，由数学归纳法可知 $\forall n$ ， $0<x_n<2$ 。由 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2x_n}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{2}-\sqrt{x_n})>0$ ，可知 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ，对等式 $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ 两端求极限，得到方程 $a=\sqrt{2a}$ ，解此方程，得到 $a=2$ （另一解 $a=0$ 舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2。$$

（3）首先有 $x_1=\sqrt{2}>-1$ ，设 $x_k>-1$ ，则 $x_{k+1}=\dfrac{-1}{2+x_k}>-1$ ，由数学

归纳法可知$\forall n$，$x_n > -1$。由$x_{n+1} - x_n = \dfrac{-1}{2+x_n} - x_n = -\dfrac{(x_n+1)^2}{2+x_n} < 0$，可知$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = \dfrac{-1}{2+x_n}$两端求极限，得到方程$a = \dfrac{-1}{2+a}$，解此方程，得到$a = -1$，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1。$$

（4）首先有$0 < x_1 = 1 < 4$，设$0 < x_k < 4$，则$0 < x_{k+1} = \sqrt{4+3x_k} < 4$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 4$。由$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 4 + 3x_n - x_n^2 = (4 - x_n)(1 + x_n) > 0$，可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = \sqrt{4+3x_n}$两端求极限，得到方程$a = \sqrt{4+3a}$，解此方程，得到$a = 4$，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4。$$

（5）首先有$0 < x_1 < 1$，设$0 < x_k < 1$，则$0 < x_{k+1} = 1 - \sqrt{1 - x_k} < 1$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 1$。由$x_{n+1} - x_n = 1 - x_n - \sqrt{1 - x_n} < 0$，可知$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$两端求极限，得到方程$a = 1 - \sqrt{1-a}$，解此方程，得到$a = 0$（另一解$a = 1$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0。$$

（6）首先有$0 < x_1 < 1$，设$0 < x_k < 1$，则$0 < x_{k+1} = x_k(2 - x_k) < 1$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 1$。由$x_{n+1} - x_n = x_n(2 - x_n) - x_n = x_n(1 - x_n) > 0$，可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$两端求极限，得到方程$a = a(2-a)$，解此方程，得到$a = 1$（另一解$a = 0$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1。$$

3. 利用递推公式与单调有界数列的性质，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1} = 0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$。

**证** （1）设 $x_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdots\cdots\frac{n+1}{2n+1}$，则 $x_n > 0$，$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2n+3} < 1$，所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式 $x_{n+1} = \frac{n+2}{2n+3}x_n$ 两端求极限，得到 $a = \frac{1}{2}a$，于是 $a = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1} = 0。$$

（2）设 $x_n = \frac{a^n}{n!}$，则 $x_n > 0$，且当 $n > a$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} < 1$，所以 $\{x_n\}$ 从某一项开始是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，对等式 $x_{n+1} = \frac{a}{n+1}x_n$ 两端求极限，得到 $x = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0。$$

（3）设 $x_n = \frac{n!}{n^n}$，则 $x_n > 0$，$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$，所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_{n+1}$ 两端求极限，得到 $a = ea$，于是 $a = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0。$$

4. 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$，$n = 1,2,3,\cdots$，分 $x_1 = 1$ 与 $x_1 = -2$ 两种情况求

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解 对$x_1=1$，易知$\forall n$，$x_n>0$，且当$n\ge 2$时，$x_n\ge\sqrt{2}$。由$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}\le 0$，可知数列$\{x_n\}$单调减少有下界，所以收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$两端求极限，得到$a=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{2}{a})$，解得$a=\sqrt{2}$（$a=-\sqrt{2}$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}\text{。}$$

对$x_1=-2$，易知$\forall n$，$x_n\le-\sqrt{2}$。由$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}\ge 0$，可知数列$\{x_n\}$单调增加有上界，所以收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，对等式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$两端求极限，得到$b=\dfrac{1}{2}(b+\dfrac{2}{b})$，解得$b=-\sqrt{2}$（$b=\sqrt{2}$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=-\sqrt{2}\text{。}$$

5. 设$x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$（$n=1,2,3,\cdots$），求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 首先利用递推公式$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$，得到数列$\{x_{n+1}-x_n\}$的通项公式$x_{n+1}-x_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$。于是由

$$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=a+(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{a+2b}{3}\text{。}$$

6. 给定 $0<a<b$，令$x_1=a, y_1=b$。

(1) 若$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$（$n=1,2,3,\cdots$），

证明 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。这个公共极限称

为 $a$ 与 $b$ 的算术几何平均；

(2) 若 $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$，$y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ （$n = 1,2,3,\cdots$），证明 $\{x_n\}$ ,$\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$。这个公共极限称为 $a$ 与 $b$ 的算术调和平均。

**证** (1) 首先易知 $\forall n$，有 $x_n \le y_n$。由 $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) \ge 0$，$y_{n+1} - y_n = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n) \le 0$，得到 $a \le x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n \le b$，即 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列，$\{y_n\}$ 是单调减少有下界的数列，所以它们收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$，对 $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ 的两端求极限，得到 $x = y$。

（2）首先易知当 $n \ge 2$ 时，有 $x_n \ge y_n$。由 $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(y_n - x_n) \le 0$，$y_{n+1} - y_n = \dfrac{y_n(x_n - y_n)}{x_n + y_n} \ge 0$，得到当 $n \ge 2$ 时，

$\dfrac{2ab}{a+b} \le y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n \le \dfrac{a+b}{2}$，即 $\{y_n\}$ 是单调增加有上界的数列，$\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，所以它们收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$，对 $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ 的两端求极限，得到 $x = y$。

7. 设 $x_1 = \sqrt{2}$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n}$ （$n = 1,2,3,\cdots$），证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

**解** 当 $0 < x_n < \sqrt{2} - 1$ 时，有 $x_{n+1} > \sqrt{2} - 1$；当 $x_n > \sqrt{2} - 1$ 时，有 $0 < x_{n+1} < \sqrt{2} - 1$。

由于 $x_1 = \sqrt{2} > \sqrt{2} - 1$，得到 $\forall n$，$x_{2n+1} > \sqrt{2} - 1$，$0 < x_{2n} < \sqrt{2} - 1$。于是由

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{2 + x_{2n-1}}{5 + 2x_{2n-1}} - x_{2n-1} = \frac{-2(x_{2n-1} - \sqrt{2} + 1)(x_{2n-1} + \sqrt{2} + 1)}{5 + x_{2n-1}} < 0,$$

$$x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{2 + x_{2n}}{5 + 2x_{2n}} - x_{2n} = \frac{-2(x_{2n} - \sqrt{2} + 1)(x_{2n} + \sqrt{2} + 1)}{5 + x_{2n}} > 0,$$

可知数列$\{x_{2n-1}\}$单调减少有下界，数列$\{x_{2n}\}$单调增加有上界，从而都收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=b$，对等式$x_{2n+1}=\dfrac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}$与$x_{2n+2}=\dfrac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}$两端求极限，得到方程$a=\dfrac{2+a}{5+2a}$与$b=\dfrac{2+b}{5+2b}$，解此两方程，得到解$a=\sqrt{2}-1$与$b=\sqrt{2}-1$（另两解$a=-\sqrt{2}-1$与$b=-\sqrt{2}-1$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}-1。$$

8. 设 $\{x_n\}$ 是一单调数列，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的充分必要条件是：存在 $\{x_n\}$ 的子列$\{x_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$。

**证** 必要性显然，现证充分性。不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，$\forall k>K$：$-\varepsilon<x_{n_k}-a\le 0$。 取$N=n_{K+1}$，$\forall n>N$，$\exists M>K+1$，使得$n_{K+1}<n<n_M$，于是$-\varepsilon<x_{n_{K+1}}-a\le x_n-a\le x_{n_M}-a\le 0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$。

9. 若有界数列 $\{x_n\}$ 不收敛，则必存在两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$收敛于不同的极限，即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(1)}} = a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(2)}} = b$，$a\ne b$。

**证** 由于 $\{x_n\}$ 不收敛，所以$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，$\exists m>n>N$：$|x_m-x_n|\ge\varepsilon_0$。

取$N_1=1$，$\exists m_1>n_1>N_1$：$|x_{m_1}-x_{n_1}|\ge\varepsilon_0$，

取$N_2=m_1$，$\exists m_2>n_2>N_2$：$|x_{m_2}-x_{n_2}|\ge\varepsilon_0$，

……，

取$N_k=m_{k-1}$，$\exists m_k>n_k>N_k$：$|x_{m_k}-x_{n_k}|\ge\varepsilon_0$，

…….

于是得到 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{x_{m_k}\}$，它们都是有界数列。首先 $\{x_{n_k}\}$ 具有收敛子列 $\{x_{n_k'}\}$，由于对应的 $\{x_{m_k'}\}$ 也是有界数列，又具有收敛子列 $\{x_{m_k''}\}$。

记$\{n_k{}''\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{m_k{}''\}=\{n_k^{(2)}\}$，则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，它们收敛于不同的极限。

10. 若数列$\{x_n\}$无界，但非无穷大量，则必存在两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量，$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列。

证　由于数列$\{x_n\}$不是无穷大量，所以$\exists M>0$，使得数列$\{x_n\}$中有无穷多项满足$|x_n|\le M$，于是从中可以取出数列$\{x_n\}$的一个收敛子列$\{x_{m_k}\}$。又由于数列$\{x_n\}$无界，所以对$\forall G>0$，数列$\{x_n\}$中必有无穷多项满足$|x_n|>G$。

取$G_1=1$，则$\exists n_1$，使得$|x_{n_1}|>G_1$，

取$G_2=2$，则$\exists n_2>n_1$，使得$|x_{n_2}|>G_2$，

……,

取$G_k=k$，则$\exists n_k>n_{k-1}$，使得$|x_{n_k}|>G_k$，

…….

记$\{n_k\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{m_k\}=\{n_k^{(2)}\}$，则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量，$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列。

11. 设$S$是非空有上界的数集，$\sup S = a \,\overline{\in}\, S$。证明在数集$S$中可取出严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

证　由$\sup S=a\,\overline{\in}\, S$，可知$\forall \varepsilon>0$，$\exists x\in S$，使得$a-\varepsilon<x<a$。

先取$\varepsilon_1=1$，则$\exists x_1\in S$，使得$a-\varepsilon_1<x_1<a$；对$\varepsilon_2=\min\{\frac{1}{2},a-x_1\}>0$，则$\exists x_2\in S$，使得$a-\varepsilon_2<x_2<a$，其中$x_1=a-(a-x_1)\le a-\varepsilon_2<x_2$；对$\varepsilon_3=\min\{\frac{1}{3},a-x_2\}>0$，则$\exists x_3\in S$，使得$a-\varepsilon_3<x_3<a$，其中$x_2=a-(a-x_2)\le a-\varepsilon_3<x_3$；……；对$\varepsilon_n=\min\{\frac{1}{n},a-x_{n-1}\}>0$，则$\exists x_n\in S$，使得$a-\varepsilon_n<x_n<a$，其中$x_{n-1}=a-(a-x_{n-1})\le a-\varepsilon_n<x_n$；……。由此在数

集$S$中取到了严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

12. 设$\{(a_n, b_n)\}$是一列开区间，满足条件：

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n)=0$。

证明存在唯一的实数$\xi$属于所有的开区间$(a_n, b_n)$，且$\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

**证** 根据题意，$\{a_n\}$单调增加有上界，$\{b_n\}$单调减少有下界，因此都收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}[a_n + (b_n - a_n)] = \xi$。由于$\{a_n\}$严格单调增加，$\{b_n\}$严格单调减少，可知$\forall n$，有$a_n < \xi < b_n$，即$\xi$属于所有的开区间$(a_n, b_n)$。

若存在另一$\xi'$属于所有的开区间$(a_n, b_n)$，则由$a_n < \xi' < b_n$，利用极限的夹逼性，得到$\xi' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，即满足题意的$\xi$是唯一的。

13. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述数列收敛：

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n \quad (|q| < 1, |a_k| \le M)$；

(2) $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$。

**证** (1) $\forall \varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{M}{1-|q|}\right)$，取$N = \left[\dfrac{\ln \frac{(1-|q|)}{M}\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，当$n > N$时，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k q^k\right| \le M|q|^{n+1}(1 + |q| + |q|^2 + \cdots + |q|^{m-n-1}) < \frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1} < \varepsilon。$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$，取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n > N$时，成立$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$。

14. (1) 设数列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1} - x_n| = 0$，问$\{x_n\}$是否一定是基本数列。

(2) 设数列{ $x_n$ }满足条件｜ $x_{n+1}-x_n$ ｜＜$\frac{1}{2^n}$（$n=1,2,3,\cdots$）。证明{ $x_n$ }是基本数列。

解（1）不一定。反例：$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$。

（2） $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，取 $N=1+\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{2}}\right]$， $\forall m>n>N$，成立

$$|x_m-x_n|\le|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\varepsilon\text{。}$$

15. 对于数列 $\{x_n\}$ 构造数集 $A_k$：

$$A_k=\{x_n \mid n\ge k\}=\{x_k,x_{k+1},\cdots\}\text{。}$$

记 $\operatorname{diam}A_k=\sup\{\,|x_n-x_m|,\ x_n\in A_k,x_m\in A_k\}$，证明数列{ $x_n$ }收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0\text{。}$$

**证** 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，$\forall k>K$，成立 $\operatorname{diam}A_k<\varepsilon$。取 $N=K$，则 $\forall m>n>N$，成立 $|x_m-x_n|\le\operatorname{diam}A_{k+1}<\varepsilon$。

16. 利用 Cauchy 收敛原理证明：单调有界数列必定收敛。

**证** 采用反证法。不妨设 $\{x_n\}$ 是单调增加的有界数列。假设它不收敛，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists m,n>N$：$|x_m-x_n|>\varepsilon_0$。

取 $N_1=1,\exists m_1>n_1>N_1:x_{m_1}-x_{n_1}>\varepsilon_0;$

取 $N_2=m_1,\exists m_2>n_2>N_2:x_{m_2}-x_{n_2}>\varepsilon_0;$

……

取 $N_k=m_{k-1},\exists m_k>n_k>N_k:x_{m_k}-x_{n_k}>\varepsilon_0;$

…….

于是 $x_{m_k}-x_{n_1}>k\varepsilon_0\to+\infty\ (k\to\infty)$，与数列 $\{x_n\}$ 有界矛盾。

# 第三章　函数极限与连续函数

## 习　题　3.1　函数极限

1. 按函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x = -\infty$；　　(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{2x}{x^2-4} = +\infty$；　　(8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$。

证　(1) 先取$|x-2|<1$，则$1<x<3$，$|x^3-8| = |(x^2+2x+4)(x-2)| < 19|x-2|$，于是对任意的$\varepsilon>0$，取$\delta = \min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{19}\right\}>0$，当$0<|x-2|<\delta$时，成立$|x^3-8|<19|x-2|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8。$$

(2) 首先函数$\sqrt{x}$的定义域为$x\ge 0$，且$|\sqrt{x}-2| = \dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \le \dfrac{1}{2}|x-4|$，于是对任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{4,2\varepsilon\}>0$，当$0<|x-4|<\delta$时，成立$|\sqrt{x}-2| \le \dfrac{1}{2}|x-4| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2。$$

(3) 先取$|x-3|<1$，则$2<x<4$，$\left|\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{x-3}{2(x+1)}\right| < \dfrac{1}{6}|x-3|$，于是对任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{1,6\varepsilon\}>0$，当$0<|x-3|<\delta$时，成立$\left|\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{6}|x-3| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}。$$

(4) 先取$|x|>1$，则$|2x-1|\ge|x|$，$\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{3}{2|2x-1|} \le \dfrac{3}{2|x|}$，于是对任意的$\varepsilon>0$，取$X=\max\left\{1,\dfrac{3}{2\varepsilon}\right\}>0$，当$|x|>X$时，成立$\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{3}{2|x|} < \varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}。$$

（5）对任意的$G>0$，取$\delta=e^{-G}>0$，当$0<x<\delta$时，成立$\ln x<-G$，所以

$$\lim_{x\to 0+}\ln x=-\infty。$$

（6）对任意的$0<\varepsilon<1$，取$X=\ln\frac{1}{\varepsilon}>0$，当$x>X$时，成立$0<e^{-x}<e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0。$$

（7）先取$0<x-2<1$，则$2<x<3$，$\frac{2x}{x+2}>1$，于是对任意的$G>0$，取$\delta=\min\left\{1,\frac{1}{G}\right\}$，当$0<x-2<\delta$时，成立$\frac{2x}{x^2-4}=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}>\frac{1}{x-2}>G$，所以

$$\lim_{x\to 2+}\frac{2x}{x^2-4}=+\infty。$$

（8）先取$x<-1$，则$\frac{x}{x+1}>1$，于是对任意的$G>0$，取$X=\max\{1,G\}$，当$x<-X$时，成立$\frac{x^2}{x+1}<x<-G$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty。$$

2. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$。

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}$。

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-5x^2+3x^4}{3-x^2+x^4}=\frac{2}{3}$。

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+5x+6x^2)-1}{x}=5$。

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+x^n}{x}=n$。

（6） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nmx+C_n^2m^2x^2+\cdots+m^nx^n)-(1+mnx+C_m^2n^2x^2+\cdots+n^mx^m)}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}nm(n-m)$。

（7） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a$。

（8） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}=2$。

（9） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x\sin 2x}{x^2}=4$。

（10） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}$。

3. 利用夹逼法求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$。

解（1） $\forall x>0$，当 $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$，有 $\dfrac{n}{n+1}<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$。$\forall x<0$，当 $-\dfrac{1}{n}<x\le-\dfrac{1}{n+1}$，有 $1\le x\left[\dfrac{1}{x}\right]<\dfrac{n+1}{n}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$。由此得到

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1。$$

（2）当 $n\le x<n+1$，有 $n^{\frac{1}{n+1}}<x^{\frac{1}{x}}<(n+1)^{\frac{1}{n}}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n+1}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1$，得到

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1。$$

4. 利用夹逼法证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$ （$a$＞1，$k$ 为任意正整数)；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^k x}{x}=0$ ($k$ 为任意正整数)。

解（1）首先有 $0<\dfrac{x^k}{a^x}<\dfrac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^k}{a^n}=0$ 即得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0。$$

（2）令 $\ln x=t$，则 $\dfrac{\ln^k x}{x}=\dfrac{t^k}{e^t}$，且当 $x\to+\infty$ 时，有 $t\to+\infty$。再利用（1）的结论，即得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x}=0。$$

5. 讨论单侧极限：

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 0<x\le 1,\\ x^2, & 1<x<2,\\ 2x & 2<x<3,\end{cases}$ 在 $x=0,1,2$ 三点；

(2) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$， 在 $x=0$ 点；

(3) Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$ 在任意点；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$，在 $x=\dfrac{1}{n}$ （$n=1,2,3,\cdots$）。

解（1）$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=4$。

（2）$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$。

（3）$D(x)$ 在任意点无单侧极限。

（4）$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+}f(x)=1$。

6. 说明下列函数极限的情况：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；  (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x\sin x$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}$；  (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$；  (6) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$。

解（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$。

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\sin x$ 极限不存在，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x\sin x$ 极限不存在。

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & \alpha<1\\ 1 & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases}$。

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=+\infty$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 极限不存在。

（5） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}=1$。

（6）取 $x_n^{'}=\frac{1}{n}$， $x_n^{''}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n^{'}}-\left[\frac{1}{x_n^{'}}\right]\right)=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n^{''}}-\left[\frac{1}{x_n^{''}}\right]\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$ 极限不存在。

7．设函数

$$f(x)=\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)。$$

问当 $x\to0$ 时， $f(x)$ 的极限是否存在？

解 由于 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^4}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$，

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1，所以$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1。$$

8. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$（$a\geq0$），证明： $\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$。

证 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$（$a\geq0$），则 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta'>0$， $\forall x(0<|x-a|<\delta')$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\delta'}{1+2\sqrt{a}}\right\}>0$，则当 $0<|x-\sqrt{a}|<\delta$ 时，首先有 $|x+\sqrt{a}|<1+2\sqrt{a}$，于是 $0<|x^2-a|=|(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})|<\delta'$，从而 $|f(x^2)-A|<\varepsilon$，这就说明了 $\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$。

9. (1) 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=A$，证明： $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$。

(2) 设$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = A$，问是否成立$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$？

证 （1）设$\lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'>0$，$\forall x(0<|x|<\delta')$（即$0<|x^3|<\delta'^3$），有$|f(x^3)-A|<\varepsilon$。取$\delta=\delta'^3>0$，则当$0<|x|<\delta$时，有$0<\left|x^{\frac{1}{3}}\right|<\delta'$，从而$|f(x)-A|<\varepsilon$，这就说明了$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$。

(2) 当$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=A$时，不一定成立$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$。例如：$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=1$，但极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。

10. 写出下述命题的“否定命题”的分析表述：

(1) $\{x_n\}$是无穷小量；

(2) $\{x_n\}$是正无穷大量；

(3) $f(x)$在$x_0$的右极限是$A$；

(4) $f(x)$在$x_0$的左极限是正无穷大量；

(5) 当$x\to-\infty$，$f(x)$的极限是$A$；

(6) 当$x\to+\infty$，$f(x)$是负无穷大量。

解（1）$\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n>N:|x_n|\ge\varepsilon_0$。

（2）$\exists G_0>0,\forall N,\exists n>N:x_n\le G_0$。

（3）$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0,x_0+\delta):|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。

（4）$\exists G_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0-\delta,x_0):f(x)\le G_0$。

（5）$\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x\in(-\infty,-X):|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。

（6）$\exists G_0>0,\forall X>0,\exists x\in(X,+\infty):f(x)\ge -G_0$。

11. 证明$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$的充分必要条件是：对于任意从右方收敛于$x_0$的数列$\{x_n\}(x_n>x_0)$，成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty。$$

证 必要性：由$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$，可知$\forall G>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x(0<x-x_0<\delta)$：$f(x)>G$。因为数列$\{x_n\}(x_n>x_0)$收敛于$x_0$，对于上述$\delta>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$0<x_n-x_0<\delta$。于是当$n>N$时，成立$f(x_n)>G$，即$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$。

充分性：用反证法。设$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$不成立，则$\exists G_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x(0<x-x_0<\delta)$：$f(x)\le G_0$。取$\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$：

对于$\delta_1=1$，$\exists x_1(0<x_1-x_0<1)$：$f(x_1)\le G_0$；

对于 $\delta_2=\frac{1}{2}$，$\exists x_2(0<x_2-x_0<\frac{1}{2})$ ： $f(x_2)\le G_0$ ；

$\cdots$,

对于 $\delta_k=\frac{1}{k}$，$\exists x_k(0<x_k-x_0<\frac{1}{k})$ ： $f(x_k)\le G_0$ ；

$\cdots$,

于是得到数列$\{x_n\}(x_n>x_0)$收敛于$x_0$，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不可能是无穷大量，由此产生矛盾，所以$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=+\infty$成立。

12. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，成立

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty。$$

证　必要性：由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，可知$\forall G>0$，$\exists X>0$，$\forall x>X$ ：$f(x)<-G$。因为数列$\{x_n\}$是正无穷大量，对于上述$X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$ ：$x_n>X$。于是当$n>N$时，成立$f(x_n)<-G$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty$。

充分性：用反证法。设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$不成立，则$\exists G_0>0$，$\forall X>0$，$\exists x>X$ ：$f(x)\ge -G_0$。取$X_n=n$，$n=1,2,3,\cdots$ ：

对于 $X_1=1$，$\exists x_1>1$ ： $f(x_1)\ge -G_0$ ；

对于 $X_2=2$，$\exists x_2>2$ ： $f(x_2)\ge -G_0$ ；

$\cdots$,

对于 $X_k=k$，$\exists x_k>k$ ： $f(x_k)\ge -G_0$ ；

$\cdots$,

于是得到数列$\{x_n\}$为正无穷大量，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不可能是负无穷大量，由此产生矛盾，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$成立。

13. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在而且有限的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛。

证　必要性：设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x>X$ ：$|f(x)-A|<\varepsilon$。因为数列$\{x_n\}$是正无穷大量，对于上述$X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$ ：$x_n>X$。于是当$n>N$时，成立$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

充分性：因为对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛，我们可以断言$\{f(x_n)\}$收敛于同一个极限。如果存在正无穷大量$\{x'_n\}$与$\{x''_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)=B$，且$A\ne B$，则取$x_{2n-1}=x'_n$，$x_{2n}=x''_n$，$\{x_n\}$仍然是正无穷大量，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不收敛。

设$\{f(x_n)\}$都收敛于同一个极限$A$，现用反证法证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 不成立，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall X>0$，$\exists x>X$ ：$|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。取 $X_n=n$， $n=1,2,3,\cdots$：

对于 $X_1=1$， $\exists x_1>1$ ：$|f(x_1)-A|\ge\varepsilon_0$ ；

对于 $X_2=2$， $\exists x_2>2$ ：$|f(x_2)-A|\ge\varepsilon_0$ ；

$\cdots,$

对于 $X_k=k$， $\exists x_k>k$ ：$|f(x_k)-A|\ge\varepsilon_0$ ；

$\cdots,$

于是得到数列$\{x_n\}$为正无穷大量，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不收敛于 $A$，由此产生矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

14．分别写出下述函数极限存在而且有限的 Cauchy 收敛原理，并加以证明：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ；（2） $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ ；（3） $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

解　（1）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $x',x''\in\{x|\ 0<|x-x_0|<\delta\}$，成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

先证必要性。设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$，

$\forall x',x''\in\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$：$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$， $|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列$\{x_n\}$， $x_n\ne x_0$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则对于条件中的 $\delta>0$， $\exists N$， $\forall n>N$ ： $0<|x_n-x_0|<\delta$。于是当 $m>n>N$ 时，成立 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$。这说明函数值数列$\{f(x_n)\}$是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而且有限。

（2） $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $x',x''\in\{x|\ 0<x-x_0<\delta\}$，成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

先证必要性。设 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$，

$\forall x',x''\in\{x|\ 0<x-x_0<\delta\}$：$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$， $|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列$\{x_n\}$， $x_n>x_0$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则对于条件中的 $\delta>0$， $\exists N$， $\forall n>N$ ： $0<x_n-x_0<\delta$。于是当 $m>n>N$ 时，成立 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$。这说明函数值数列$\{f(x_n)\}$是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 存在而且有限。

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$X>0$，对一切$x',x''<-X$，成立$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。

先证必要性。设$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x',x''<-X$：$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列$\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$，则对于条件中的$X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$x_n<-X$。于是当$m>n>N$时，成立$\left|f(x_m)-f(x_n)\right|<\varepsilon$。这说明函数值数列$\{f(x_n)\}$是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在而且有限。

15．设$f(x)$在$(0,+\infty)$上满足函数方程$f(2x)=f(x)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，证明

$$f(x)\equiv A,\quad x\in(0,+\infty)。$$

**证** $\forall x_0\in(0,+\infty)$，利用$f(x)=f(2x)$得到$f(x_0)=f(2^n x_0)$，由于

$$\lim_{n\to\infty} f(2^n x_0)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A，得到 f(x)\equiv A,\quad x\in(0,+\infty)。$$

# 习 题 3.2 连续函数

1. 按定义证明下列函数在其定义域连续：

(1) $y=\sqrt{x}$；　　(2) $y=\sin\frac{1}{x}$；

(3) $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

证 （1）函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $D=[0,+\infty)$。设 $x_0\in D$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^2>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ （$x\in D$）时，成立

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|\le\sqrt{|x-x_0|}<\varepsilon,$$

所以函数 $y=\sqrt{x}$ 在其定义域连续。

（2）函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的定义域是 $D=(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$。设 $x_0\in D$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\frac{|x_0|^2}{2}\varepsilon\right\}>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right|\le\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}<\frac{2|x-x_0|}{|x_0|^2}<\varepsilon,$$

所以函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在其定义域连续。

（3）函数 $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$。由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，可知函数在 $x_0=0$ 连续。设 $x_0\neq 0$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\frac{|x_0|^2}{2(|x_0|+1)}\varepsilon\right\}>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$\left|\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x_0}{x_0}\right|=\frac{|x_0\sin x-x\sin x_0|}{|xx_0|}\le\frac{|x_0||\sin x-\sin x_0|+|\sin x_0||x-x_0|}{|xx_0|}$$
$$<\frac{2(|x_0|+1)}{|x_0|^2}|x-x_0|<\varepsilon,$$

所以 $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在其定义域连续。

2. 确定下列函数的连续范围：

(1) $y=\tan x+\csc x$；　　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$；

(3) $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{x+1}}$；　　(4) $y=[x]\ln(1+x)$；

(5) $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$；　　　　　　　　(6) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$。

解（1）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right)$。

（2）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$。

（3）$(-1,1]\cup[3,+\infty)$。

（4）$\{x \mid x>-1,\ x\notin \mathrm{N}^+\}$。

（5）$\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}\setminus\left\{\dfrac{1}{k}\mid k\in Z,\ k\neq 0\right\}$。

（6）$\bigcup\limits_{k\in Z}(k\pi,(k+1)\pi)$。

3. 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，证明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 $x_0$ 也连续。反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 $x_0$ 连续，能否断言 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续?

解 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，则 $\forall 0<\varepsilon<1$，$\exists\delta>0$，$\forall x(|x-x_0|<\delta)$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，同时还有 $|f(x)+f(x_0)|<1+2|f(x_0)|$，于是成立

$$\left|f^2(x)-f^2(x_0)\right|=|(f(x)+f(x_0))(f(x)-f(x_0))|<(1+2|f(x_0)|)\varepsilon$$

与

$$\|f(x)|-|f(x_0)\|\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

这说明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 $x_0$ 也连续。

反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 $x_0$ 连续，则不能断言 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续。例如：$f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 $x_0=0$ 是连续的。

4. 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，$g(x)$ 在点 $x_0$ 不连续，能否断言 $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 不连续?

又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x_0$ 都不连续，则上面的断言是否成立?

解　若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，$g(x)$ 在点 $x_0$ 不连续，不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 不连续：例如 $f(x)\equiv 0$ 在点 $x_0=0$ 连续，$g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 2 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 在点 $x_0=0$ 连续。

又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x_0$ 都不连续，也不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 不连续：例如 $f(x)=\begin{cases}2 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，$g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 2 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 2$ 在点 $x_0=0$ 连续。

5. 若 $f,g$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，其中

$\max\{f，g\} = \max\{f(x)，g(x)\}，x\in[a,b]$；

$\min\{f，g\} = \min\{f(x)，g(x)\}，x\in[a,b]$。

证　由 $f,g$ 在 $[a,b]$ 上的连续性，可知 $|f(x)-g(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，利用等式

$$\max\{f,g\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\},$$

$$\min\{f,g\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\},$$

即得到 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 上的连续性。

6. 若对任意 $\delta>0$，$f$ 在［$a+\delta, b-\delta$］上连续，能否得出

(1)　$f$ 在 $(a,b)$ 上连续?

(2)　$f$ 在 $[a,b]$ 上连续?

解　(1) 能。(2) 不能。

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\alpha^{\beta}$；并求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(\sin a\neq 0)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{n}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$。

证　由于 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\ln f(x)]=\beta\ln\alpha$，利用指数函数的连续性，得到

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\beta\ln\alpha}=\alpha^{\beta}。$$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=e^{2}$。

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}}=e^{\cot a}$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{x+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{x+1}}\right]^{\frac{(x+1)n}{n-1}}=e^{x+1}$。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{2n\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}=e^2$。

8. 指出下列函数的不连续点，并确定其不连续的类型：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$ (2) $y=[x]\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$； (4) $y=[2x]-2[x]$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$； (6) $y=x\ln^n|x|$；

(7) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$； (8) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+2x}-1}$；

(9) $y=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数};\end{cases}$ (10) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p,q\text{互质，}p>0),\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

解 (1) $x=1,-2$，第二类不连续点。

(2) $x=k\ (k\in Z,k\neq 0)$，第一类不连续点；$x=0$，第二类不连续点。

(3) $x=k\pi\ (k\in Z,k\neq 0)$，第二类不连续点；$x=0$，第三类不连续点。

(4) $x=\frac{1}{2}k\ (k\in Z)$，第一类不连续点。

(5) $x=0$，第三类不连续点。

(6) $x=0$，第三类不连续点。

(7) $x=0$，第一类不连续点；$x=1$，第三类不连续点；$x=-1$，第二类不连续点。

(8) $x=0$，第三类不连续点。

(9) 非整数点，第二类不连续点。

(10) 非整数有理点，第三类不连续点。

9．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(x^2)=f(x)$，$x\in(0,+\infty)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为常数函数。

证 $\forall x\in(0,+\infty)$，利用 $f(x^2)=f(x)$ 得到 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$ 及 $f(x)$ 的连续性，得到 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$。

# 习　题 3.3　无穷小量与无穷大量的阶

1. 确定 $a$ 与α，使下列各无穷小量或无穷大量等价于(～) $ax^{\alpha}$：

(1) $u(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3$, ($x\to0$，$x\to\infty$)；

(2) $u(x) = \dfrac{x^5 + 2x^2}{3x^4 - x^3}$ ($x\to0$，$x\to\infty$)；

(3) $u(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$ ($x\to0+$，$x\to+\infty$)；

(4) $u(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ($x\to0+$，$x\to+\infty$)；

(5) $u(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$ ($x\to0$，$x\to+\infty$)；

(6) $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ ($x\to+\infty$)；

(7) $u(x) = \sqrt{x^3+x} - x^{\frac{3}{2}}$ ($x\to0+$)；

(8) $u(x) = \sqrt{1+x\sqrt{x}} - e^{2x}$ ($x\to0+$)；

(9) $u(x) = \ln\cos x - \arctan x^2$ ($x\to0$)；

(10) $u(x) = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}$ ($x\to0$)。

**解** (1) $u(x) \sim 2x^3\ (x\to0)$；$u(x) \sim x^5\ (x\to\infty)$。

(2) $u(x) \sim -2x^{-1}\ (x\to0)$；$u(x) \sim \frac{1}{3}x\ (x\to\infty)$。

(3) $u(x) \sim x^{\frac{2}{3}}\ (x\to0+)$；$u(x) \sim x^{\frac{3}{2}}\ (x\to+\infty)$。

(4) $u(x) \sim x^{\frac{1}{8}}\ (x\to0+)$；$u(x) \sim x^{\frac{1}{2}}\ (x\to+\infty)$。

(5) $u(x) \sim \frac{5}{6}x\ (x\to0)$；$u(x) \sim \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}\ (x\to+\infty)$。

(6) $u(x) \sim \frac{1}{2}x^{-1}\ (x\to+\infty)$。

(7) $u(x) \sim x^{\frac{1}{2}}\ (x\to0+)$。

(8) $u(x) \sim -2x\ (x\to0+)$。

（9） $u(x)\sim -\frac{3}{2}x^2\ (x\to 0)$。

（10） $u(x)\sim x\ (x\to 0)$。

2. (1) 当 $x\to+\infty$时，下列变量都是无穷大量，将它们从低阶到高阶进行排列，并说明理由。

$$a^x\ \ (a>1),\ \ x^x,\ \ x^{\alpha}\ \ (\alpha>0),\ \ \ln^k x\ \ (k>0),\ \ [x]!\ ;$$

(2) 当 $x\to 0+$时，下列变量都是无穷小量，将它们从高阶到低阶进行排列，并说明理由。

$$x^{\alpha}\ (\alpha>0),\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},\ a^{-\frac{1}{x}}\ \ (a>1),\ \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\ \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)\ \ (k>0)。$$

解（1）当 $x\to+\infty$时，从低阶无穷大量到高阶无穷大量的排列为

$$\ln^k x\ \ (k>0),\ \ x^{\alpha}\ \ (\alpha>0),\ \ a^x\ \ (a>1),\ \ [x]!,\ \ x^x。$$

证明：设 $n\le x<n+1$，则 $0<\frac{x^{\alpha}}{a^x}<\frac{(n+1)^{\alpha}}{a^n}$，$0<\frac{a^x}{[x]!}<\frac{a^{n+1}}{n!}$，$0<\frac{[x]!}{x^x}<\frac{(n+1)!}{n^n}$。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}}{a^n}=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{n!}=0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}=0$， 即得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^x}=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^x}{[x]!}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]!}{x^x}=0$，同时也得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^k}{(e^{\alpha})^y}=0\quad(y=\ln x)$。

（2）当 $x\to 0+$时，从高阶无穷小量到低阶无穷小量的排列为

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},\ a^{-\frac{1}{x}}\ \ (a>1),\ \ x^{\alpha}\ \ (\alpha>0),\ \ \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)\ (k>0)。$$

证明：令 $y=\frac{1}{x}$，则当 $x\to 0+$时，有 $y\to+\infty$。参考（1）的排列即可得到（2）的排列。

3. 计算下列极限：

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$；(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$；

(3) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$；(4) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$；

(5) $\lim_{x\to\alpha}\frac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}\quad(a>0)$；(6) $\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}\quad(a>0)$；

(7) $\lim_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)$；(8) $\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\quad(a>0)$；

(9) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；(10) $\lim_{x\to 0}\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(11) $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)\quad(x>0)$；(12) $\lim_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})\quad(x>0)$。

解（1）$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)-(\sqrt[3]{1+2x^2}-1)}{\ln(1+3x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^2}{3x}=\frac{1}{6}$。

（2）$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=0$。

（3）$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$。

（4）$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}=1$。

（5）$\lim_{x\to\alpha}\frac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{a^\alpha(a^{x-\alpha}-1)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{a^\alpha(x-\alpha)\ln a}{x-\alpha}=a^\alpha\ln a$。

（6）$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha(e^{\alpha\ln\frac{x}{a}}-1)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\alpha\ln(1+\frac{x-a}{a})}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\alpha\cdot\frac{x-a}{a}}{x-a}=\alpha a^{\alpha-1}$。

（7）$\lim_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=1$。

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+\dfrac{x-a}{a})}{x-a}=\dfrac{1}{a}$。

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\mathrm{e}^{x}-1)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{2}$。

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-(1-\cos x)-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}$。

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n\,(\sqrt[n]{x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\dfrac{1}{n}\ln x)=\ln x$。

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1)-(e^{\frac{1}{n+1}\ln x}-1)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2\ln x\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\ln x$。

# 习　题 3.4　闭区间上的连续函数

1. 证明：设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$（有限数），则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界。

**证** 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$（有限数），可知 $\exists X > a$，$\forall x > X$：$|f(x)-A| < 1$，即 $A-1 < f(x) < A+1$。再由 $f(x)$ 在闭区间 $[a,X]$ 上的连续性，可知 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上有界，即 $\forall x\in[a,X]$：$|f(x)| < B$。令 $M = \max\{B, A+1\}$，$m = \min\{-B, A-1\}$，则 $\forall x\in[a,+\infty)$，成立 $m < f(x) < M$。

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上连续，且 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 存在，则它可取到介于 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 之间的一切中间值。

**证** 令

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\in(a,b) \\ f(a+) & x = a \\ f(b-) & x = b \end{cases},$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，不妨设 $f(a+) < f(b-)$，由闭区间上连续函数的中间值定理，可知 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可取到 $[f(a+), f(b-)]$ 上的一切值，于是 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上可取到介于 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 之间的一切中间值。

3. 证明：若闭区间 $[a,b]$ 上的单调有界函数 $f(x)$ 能取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切值，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数。

**证** 采用反证法。不妨设 $f(x)$ 单调增加。若 $\xi\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的不连续点，则 $f(\xi-)$ 与 $f(\xi+)$ 都存在，且 $f(a)\le f(\xi-) < f(\xi+) \le f(b)$，于是 $f(x)$ 取不到开区间 $(f(\xi-), f(\xi+))$ 中异于 $f(\xi)$ 的值，与条件矛盾；若 $x = a$ 是 $f(x)$ 的

不连续点，则 $f(a+)$ 存在，且 $f(a) < f(a+) \le f(b)$，于是 $f(x)$ 取不到开区间 $(f(a), f(a+))$ 中的值，也与条件矛盾；同样可以证明 $x = b$ 也不可能是 $f(x)$ 的不连续点。

4. 应用 Bolzano-Weierstrass 定理证明闭区间上连续函数的有界性定理。

**证** 采用反证法。设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，但无界，则存在点列 $\{x_n\}$，$x_n \in [a,b]$，满足 $|f(x_n)| > n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$。由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在子列 $\{x_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$，且 $\xi \in [a,b]$。因为 $f(x)$ 在点 $\xi$ 连续，所以有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$，与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ 产生矛盾。

5. 应用闭区间套定理证明零点存在定理。

**证** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$，不妨设 $a = a_1$，$b = b_1$，$f(a) < 0$，$f(b) > 0$。

如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$，则定理得证。如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0$，则令 $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2 = b_1$；如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0$，则令 $a_2 = a_1$，$b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$。

如果 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0$，则定理得证。如果 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0$，则令 $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$，$b_3 = b_2$；如果 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0$，则令 $a_3 = a_2$，$b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$。

……,

这样的过程可以一直进行下去。如果存在某个 $k$，使得 $f(\frac{a_k+b_k}{2}) = 0$，则定理得证；如果不存在某个 $k$，使得 $f(\frac{a_k+b_k}{2}) = 0$，则得到一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，满足 $f(a_n) < 0$，$f(b_n) > 0$。由闭区间套定理，可知存

在唯一属于所有闭区间$[a_n,b_n]$的点$\xi$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。再由$f(x)$在点$\xi$的连续性，可知$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\le 0$与$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0$，从而得到$f(\xi)=0$，定理得证。

6. 证明方程$x=a\sin x+b$（$a,b>0$）至少有一个正根。

证　令$f(x)=x-a\sin x-b$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续。取$A>a+b$，则$f(0)<0$，$f(A)>0$，由零点存在定理，$f(x)$在$(0,A)$上至少有一个根。

7．证明方程$x^3+px+q=0$（$p>0$）有且仅有一个实根。

证　令$f(x)=x^3+px+q$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是严格单调增加的。由$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，易知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有且仅有一个实根。

8．证明：

（1）$\sin\frac{1}{x}$在（0,1）上不一致连续，但在$(a,1)$($a$＞0)上一致连续；

（2）$\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续，但在$[0,A]$上一致连续；

（3）$\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续；

（4）$\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续；

(5) $\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续。

证（1）在$(0,1)$上，令$x_n'=\frac{1}{n\pi}$，$x_n''=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x_n'-x_n''\to 0$，但$\left|\sin\frac{1}{x_n'}-\sin\frac{1}{x_n''}\right|=1$，所以$\sin\frac{1}{x}$在（0,1）上不一致连续。

在$(a,1)$ ($a$＞0)上，$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=a^2\varepsilon>0$，$\forall x_1,x_2\in(a,1)$，$|x_1-x_2|<\delta$，成立

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|\le\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\le\frac{|x_1-x_2|}{a^2}<\varepsilon,$$

所以 $\sin\frac{1}{x}$ 在$(a,1)$ $(a>0)$上一致连续。

（2）在$-\infty,+\infty)$上，令 $x_n' = \sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$， $x_n'' = \sqrt{n\pi}$，则 $x_n' - x_n'' \to 0$，但

$$\left|\sin\left(x_n'\right)^2 - \sin\left(x_n''\right)^2\right| = 1，$$

所以 $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

在 $[0,A]$ 上， $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2A} > 0$， $\forall x_1, x_2 \in [0,A]$， $|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\sin x_1^2 - \sin x_2^2\right| \le \left|x_1^2 - x_2^2\right| \le 2A|x_1 - x_2| < \varepsilon，$$

所以 $\sin x^2$ 在$[0,A]$上一致连续。

（3） $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = \varepsilon^2 > 0$， $\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty)$， $|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \le \sqrt{|x_1 - x_2|} < \varepsilon，$$

所以 $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

（4） $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = \varepsilon > 0$， $\forall x_1, x_2 \in [1,+\infty)$， $0 \le x_1 - x_2 < \delta$，成立

$$|\ln x_1 - \ln x_2| = \left|\ln\left(1 + \frac{x_1 - x_2}{x_2}\right)\right| \le |x_1 - x_2| < \varepsilon，$$

所以 $\ln x$ 在 $[1,+\infty)$上一致连续。

（5） $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = \varepsilon^2 > 0$， $\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty)$， $|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\cos\sqrt{x_1} - \cos\sqrt{x_2}\right| \le \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \le \sqrt{|x_1 - x_2|} < \varepsilon，$$

所以 $\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

9．证明：对椭圆内的任意一点 $P$，存在椭圆过 $P$ 的一条弦，使得 $P$ 是该弦的中点。

**证** 过 $P$ 点作弦，设弦与 $x$ 轴的夹角为 $\theta$， $P$ 点将弦分成长度为 $l_1(\theta)$ 和 $l_2(\theta)$ 的两线段，则 $f(\theta) = l_1(\theta) - l_2(\theta)$ 在 $[0,\pi]$ 连续，满足 $f(0) = -f(\pi)$，于

是必有 $\theta_0 \in [0,\pi]$，满足 $f(\theta_0)=0$，也就是 $l_1(\theta_0)=l_2(\theta_0)$。

10．设函数 $f(x)$ 在[0,2]上连续，且 $f(0) = f(2)$，证明：存在 $x, y \in [0,2]$，$y - x = 1$，使得 $f(x) = f(y)$。

证 令 $F(x) = f(x+1) - f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$F(1) = -F(0)$，于是必有 $x_0 \in [0,1]$，满足 $F(x_0) = 0$。令 $y_0 = x_0 + 1$，则 $x_0, y_0 \in [0,2]$，$y_0 - x_0 = 1$，使得 $f(x_0) = f(y_0)$。

11．若函数 $f(x)$ 在有限开区间 $(a,b)$ 上一致连续，则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有界。

证 由 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上一致连续，可知 $f(a+)$，$f(b-)$ 存在且有限。令

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ f(a+) & x = a \\ f(b-) & x = b \end{cases},$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，所以 $\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，因此 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有界。

12．证明：

（1）某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续；

（2）某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续。

证（1）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $I$ 上一致连续，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x', x'' \in I$，$|x' - x''| < \delta$，成立 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$，$|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| < \varepsilon,$$

所以 $f(x) + g(x)$ 在区间 $I$ 上一致连续。

（2）设 $f(x) = g(x) = x$，区间 $I = [0,+\infty)$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $I$ 上一致连续，但 $f(x)g(x) = x^2$ 在区间 $I$ 上不一致连续。

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) \neq 0,\ x \in [a,b]$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上

恒正或恒负。

**证** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不保持定号，则存在 $x',x''\in[a,b]$（不妨设 $x'<x''$），使 $f(x')$ 与 $f(x'')$ 不同号，由闭区间上连续函数的中间值定理，必定存在 $\xi\in[x',x'']$，使得 $f(\xi)=0$，这就产生矛盾，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定恒正或恒负。

14．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$，证明在 $[a,b]$ 中必有 $\xi$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]。$$

**证** 根据闭区间上连续函数的中间值定理，闭区间上连续函数一定能取到最大值和最小值之间任何一个值。由于

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\le\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]\le\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}，$$

所以在 $[a,b]$ 中必有 $\xi$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]。$$

15．若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限数)，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

**证** 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall x',x''>X:\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。由于 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 连续，所以一致连续，也就是

$\exists 0<\delta<1,\forall x',x''\in[a,X+1](|x'-x''|<\delta):\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。于是

$\forall x',x''\in[a,+\infty)(|x'-x''|<\delta):\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。

# 第四章　微分

## 习　题　4.1　微分和导数

1. 半径为 1cm 的铁球表面要镀一层厚度为 0.01cm 的铜，试用求微分的方法算出每只球需要用铜多少克？（铜的密度为 $8.9\mathrm{g/cm^3}$。）

**解**　球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，每只球镀铜所需要铜的质量为

$$m=\rho\Delta V\approx 4\rho\pi r^2\Delta r\approx 1.12\ \mathrm{g}。$$

2. 用定义证明，函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在它的整个定义域中，除了 $x=0$ 这一点之外都是可微的。

**证**　当 $x=0$ 时，$\Delta y=\sqrt[3]{\Delta x^2}$ 是 $\Delta x$ 的低阶无穷小，所以 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 不可微。当 $x\neq 0$ 时，

$$\Delta y=\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x})$$
$$=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x^2}}\Delta x=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Delta x+o(\Delta x),$$

所以 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x\neq 0$ 是可微的。

# 习　题　4.2　导数的意义和性质

1．　设$f'(x_0)$存在，求下列各式的值：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$。

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{(-\Delta x)}=-f'(x_0)$。

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x-x_0\to 0}\dfrac{f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$。

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0)$。

2．　(1) 用定义求抛物线$y=2x^2+3x-1$的导函数；

(2) 求该抛物线上过点$(-1,-2)$处的切线方程；

(3) 求该抛物线上过点$(-2,1)$处的法线方程；

(4) 问该抛物线上是否有$(a,b)$，过该点的切线与抛物线顶点与焦点的连线平行？

解 (1)因为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-1-(2x^2+3x-1)}{\Delta x}=4x+3+2\Delta x$，所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+3。$$

(2)由于 $f'(-1)=-1$，切线方程为$y=-1\cdot[x-(-1)]+(-2)=-x-3$。

(3)由于 $f'(-2)=-5$，法线方程为$y=-\dfrac{1}{-5}[x-(-2)]+1=\dfrac{x+7}{5}$。

(4) 抛物线顶点与焦点的连线平行于 y 轴，即斜率为无穷大，由(1)可

知不存在 $x$，使得 $f'(x)=\infty$，所以这样的点 $(a,b)$ 不存在。

3．设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且在 $x=0$ 的某个邻域上成立

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

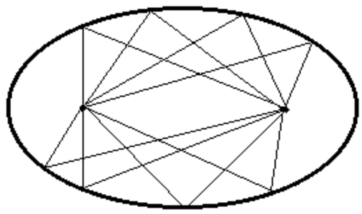
其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 $x$ 高阶的无穷小。求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程。

解 记 $F(x)=f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)$，可得 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=-2f(1)=0$，即 $f(1)=0$。由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{x}=8$ 与

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]-3\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=4f'(1),$$

得到 $f'(1)=2$。于是曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2(x-1)$。

4． 证明：从椭圆的一个焦点发出的任一束光线，经椭圆反射后，反射光必定经过它的另一个焦点。 （见图 4.2.5）


图4.2.5

证 设椭圆方程为

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$，焦点坐标为

$(\pm c,0),\ c=\sqrt{a^2-b^2}$。假设 $(x_0,y_0)$ 为椭圆上任意一点，当 $y_0=0$ 时结论显然成立。现设 $y_0\neq 0$，则过此点的切线斜率为 $\tan\theta=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，$(x_0,y_0)$ 与焦点 $(-c,0)$ 连线的斜率为 $\tan\theta_1=\dfrac{y_0}{x_0+c}$，此连线与切线夹角的正切为 $k=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta}{1+\tan\theta_1\tan\theta}$。利用 $c^2=a^2-b^2$ 和 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ 代入计算，得到

$$k=\frac{\frac{y_0}{x_0+c}+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1-\frac{y_0}{x_0+c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2+cx_0b^2}{(a^2-b^2)x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{a^2b^2+cx_0b^2}{c^2x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}。$$

$(x_0, y_0)$与另一焦点$(c,0)$连线的斜率为$\tan\theta_2=\frac{y_0}{x_0-c}$，此连线与切线夹角的正切为

$$\frac{\tan\theta-\tan\theta_2}{1+\tan\theta\tan\theta_2}=\frac{-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}-\frac{y_0}{x_0-c}}{1-\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{cx_0b^2-a^2y_0^2-b^2x_0^2}{(a^2-b^2)x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{cx_0b^2-a^2b^2}{c^2x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}=k。$$

由于两个夹角的正切相等，所以两个夹角相等，命题得证。

5．证明：双曲线$xy=a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积恒为$2a^2$。

证　假设$(x_0,y_0)$为双曲线上任意一点，则$x_0y_0=a^2$，过这一点的切线斜率为$y'|_{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}=-\frac{y_0}{x_0}$，切线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)，$$

易得切线与两坐标轴的交点为$(0,2y_0)$和$(2x_0,0)$。切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}(2y_0)(2x_0)=2x_0y_0=2a^2。$$

6．　求函数在不可导点处的左导数和右导数。

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=\sqrt{1-\cos x}$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-|x|}$；　　(4) $y=|\ln(x+1)|$.

解　(1) 对$y=f(x)=|\sin x|$，当$x=0$时，

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1,$$
$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

所以$x=0$是不可导点。又由于函数y是周期为$\pi$的函数，所有不可导点为$x=k\pi\ (k\in Z)$，且$f_-'(k\pi)=-1$， $f_+'(k\pi)=1$。

（2） $y=f(x)=\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$，由（1）可知不可导点为$x=2k\pi\ (k\in Z)$，且经计算得到 $f_-'(2k\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$， $f_+'(2k\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

（3） $y=f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$不可导点只有$x=0$，且

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{e^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=-1,\quad f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1。$$

（4） $y=f(x)=|\ln(x+1)|$不可导点只有$x=0$，且

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-\ln 1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=1,$$
$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-\ln 1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=-1。$$

7．讨论下列函数在$x=0$处的可导性：

(1) $y=\begin{cases}|x|^{1+a}\sin\frac{1}{x},(a>0) & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　(2) $y=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ ax+b, & x\le 0;\end{cases}$

(3) $y=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^x, & x>0,\\ ax^2, & x\le 0;\end{cases}$　(4) $y=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 （1） $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^{1+a}\sin\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|^a\operatorname{sgn}(\Delta x)\sin\frac{1}{x}\right)=0$，所以函数在$x=0$可导。

(2) 如果函数在$x=0$可导，则必须在$x=0$连续，由$f(0+)=f(0)=b$可得$b=0$。当$b=0$时， $f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x^2-0}{\Delta x}=0$， $f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{a\Delta x-0}{\Delta x}=a$，

故当$a=b=0$时函数在$x=0$可导，其他情况下函数在$x=0$不可导。

（3）由于$f_{+}^{'}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x e^{\Delta x}-0}{\Delta x}=1$，$f_{-}^{'}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{a\Delta x^2-0}{\Delta x}=0\neq f_{+}^{'}(0)$，故函数在$x=0$不可导。

（4）当$a\geq 0$时函数在$x=0$不连续，所以不可导；当$a<0$时，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=0$，所以当$a<0$时函数在$x=0$可导。

8． 设$f(x)$在$x=0$处可导，在什么情况下，$|f(x)|$在$x=0$处也可导？

解 当$f(0)\neq 0$时，不妨设$f(0)>0$，则在$x=0$的小邻域中有$f(x)>0$，故$|f(x)|=f(x)$，所以$|f(x)|$在$x=0$处也可导。

当$f(0)=0$时，由于

$$\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\operatorname{sgn}x\text{，}$$

分别在$x=0$处计算左、右极限，得到$|f(x)|$在$x=0$处的左导数为$-|f'(0)|$，右导数为$|f'(0)|$，所以$|f(x)|$在$x=0$处也可导的充分必要条件是$f'(0)=0$。

9．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)=0$，且$f_{+}'(a)\cdot f_{-}'(b)>0$，证明$f(x)$在$(a,b)$至少存在一个零点。

证 由题设知$f_{+}'(a)$和$f_{-}'(b)$同号，不妨设两者都为正数。由于$f_{+}^{'}(a)=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，可知存在$x_1\ (a<x_1<b)$，$f(x_1)>0$。同理由于$f_{-}^{'}(b)=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$，可知存在$x_2\ (x_1<x_2<b)$，$f(x_2)<0$。由连续函数的零点存在定理，函数$f(x)$在$x_1,x_2$之间有零点。

10．设$f(x)$在有限区间$(a,b)$内可导，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)=\infty$ ？

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$ ？

解（1）不一定。反例： $f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$， $a=0$， $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$，

$f'(x)=\frac{1}{x^2}(-1+\sin\frac{1}{x})$， $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\infty$不成立。

（2）不一定。反例： $f(x)=\sqrt{x}$， $a=0$， $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$，而

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0\neq\infty$。

11．设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$。证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是：存在在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$，使得 $f(x)=xg(x)$，且此时成立 $f'(0)=g(0)$。

证　充分性。由 $f(x)=xg(x)$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且成立 $f'(0)=g(0)$。

必要性。令 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$，则 $f(x)=xg(x)$，且

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0)$，即 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

# 习　题　4.3　导数四则运算和反函数求导法则

1．用定义证明$(\cos x)' = -\sin x$。

证　由于

$$\cos(x+\Delta x)-\cos x = -2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}，$$

根据$\sin x$的连续性和$\sin(\frac{\Delta x}{2}) \sim \frac{\Delta x}{2}(\Delta x \to 0)$，可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x。$$

2. 证明：

(1) $(\csc x)' = -\cot x\csc x$；

(2) $(\cot x)' = -\csc^2 x$；

(3) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(4) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$；

(5) $(\operatorname{ch}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

(6) $(\operatorname{th}^{-1} x)' = (\operatorname{cth}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

解（1） $(\csc x)'=\left[\frac{1}{\sin x}\right]' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x\csc x$。

（2） $(\cot x)' = \left[\frac{1}{\tan x}\right]' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$。

（3） $(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2}-\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

（4） $(\operatorname{arccot} x)' = (\frac{\pi}{2}-\arctan x)' = -\frac{1}{1+x^2}$。

（5） $(\operatorname{ch}^{-1} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$。

（6） $(\operatorname{th}^{-1}x)' = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$，

$$(\text{cth}^{-1}x)' = \frac{1}{(\text{cth}\,y)'} = -\frac{1}{\text{csch}^2 y} = -\frac{1}{\text{cth}^2 y - 1} = \frac{1}{1-x^2}。$$

3. 求下列函数的导函数：

(1) $f(x) = 3\sin x + \ln x - \sqrt{x}$；  (2) $f(x) = x\cos x + x^2 + 3$；

(3) $f(x) = (x^2 + 7x - 5)\sin x$；  (4) $f(x) = x^2(3\tan x + 2\sec x)$；

(5) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x - 4\cos x + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$；  (6) $f(x) = \dfrac{2\sin x + x - 2^x}{\sqrt[3]{x^2}}$；

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x + \cos x}$；  (8) $f(x) = \dfrac{x\sin x - 2\ln x}{\sqrt{x} + 1}$；

(9) $f(x) = \dfrac{x^3 + \cot x}{\ln x}$；  (10) $f(x) = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\sin x - \cos x}$；

(11) $f(x) = (\mathrm{e}^x + \log_3 x)\arcsin x$；  (12) $f(x) = (\csc x - 3\ln x)x^2\,\text{sh}\,x$；

(13) $f(x) = \dfrac{x + \sec x}{x - \csc x}$；  (14) $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{\arctan x}$；

解 (1) $f'(x) = (3\sin x)' + (\ln x)' - (\sqrt{x})' = 3\cos x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$。

(2) $f'(x) = x'\cos x + x(\cos x)' + (x^2)' + (3)' = \cos x - x\sin x + 2x$。

(3) $f'(x) = (x^2 + 7x - 5)'\sin x + (x^2 + 7x - 5)(\sin x)'$

$= (2x + 7)\sin x + (x^2 + 7x - 5)\cos x$。

(4) $f'(x) = (x^2)'(3\tan x + 2\sec x) + x^2(3\tan x + 2\sec x)'$

$= 2x(3\tan x + 2\sec x) + x^2(3\sec^2 x + 2\tan x\sec x)$。

(5) $f'(x) = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' - (4\cos x)' + (\dfrac{3}{\sqrt{x}})'$

$= e^x(\sin x + \cos x) + 4\sin x - \dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$。

(6) $f'(x) = (x + 2\sin x - 2^x)'x^{-\frac{2}{3}} + (x + 2\sin x - 2^x)(x^{-\frac{2}{3}})'$

$$=(1+2\cos x-2^x\ln 2)x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(x+2\sin x-2^x)x^{-\frac{5}{3}}。$$

(7) $f'(x)=-\dfrac{(x+\cos x)'}{(x+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x-1}{(x+\cos x)^2}$。

(8) $f'(x)=\dfrac{(x\sin x-2\ln x)'(\sqrt{x}+1)-(x\sin x-2\ln x)(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$$=\frac{2(x\sin x+x^2\cos x-2)(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}(x\sin x-2\ln x)}{2x(\sqrt{x}+1)^2}。$$

(9) $f'(x)=\dfrac{(x^3+\cot x)'\ln x-(x^3+\cot x)(\ln x)'}{\ln^2 x}$

$$=\frac{(3x^2-\csc^2 x)x\ln x-x^3-\cot x}{x\ln^2 x}。$$

(10) $f'(x)=(1+\dfrac{2\cos x}{x\sin x-\cos x})'$

$$=\frac{(2\cos x)'(x\sin x-\cos x)-2\cos x(x\sin x-\cos x)'}{(x\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{-2(x+\sin x\cos x)}{(x\sin x-\cos x)^2}。$$

(11) $f'(x)=(e^x+\log_3 x)'\arcsin x+(e^x+\log_3 x)(\arcsin x)'$

$$=(e^x+\frac{1}{x\ln 3})\arcsin x+(e^x+\frac{\ln x}{\ln 3})\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}。$$

(12) $f'(x)=(\csc x-3\ln x)'x^2\mathrm{sh}x+(\csc x-3\ln x)(x^2)'\mathrm{sh}x$

$$+(\csc x-3\ln x)x^2(\mathrm{sh}x)'$$

$$=-(\cot x\csc x+\frac{3}{x})x^2\mathrm{sh}x+(\csc x-3\ln x)(2x)\mathrm{sh}x+(\csc x-3\ln x)x^2\mathrm{ch}x$$

$$=-(x^2\cot x\csc x+3x)\mathrm{sh}x+x(\csc x-3\ln x)(2\mathrm{sh}x+x\mathrm{ch}x)。$$

(13) $f'(x)=\dfrac{(x+\sec x)'(x-\csc x)-(x+\sec x)(x-\csc x)'}{(x-\csc x)^2}$

$$=\frac{(1+\tan x\sec x)(x-\csc x)-(x+\sec x)(1+\cot x\csc x)}{(x-\csc x)^2}。$$

（14） $f'(x)=\dfrac{(x+\sin x)'\arctan x-(x+\sin x)(\arctan x)'}{\arctan^2 x}$

$$=\frac{(1+x^2)(1+\cos x)\arctan x-(x+\sin x)}{(1+x^2)\arctan^2 x}。$$

4. 求曲线 $y=\ln x$ 在 $(\mathrm{e},1)$ 处的切线方程和法线方程。

解　因为 $y'(e)=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$，切线方程为

$$y=\frac{1}{e}(x-e)+1=\frac{x}{e},$$

法线方程为

$$y=-e(x-e)+1=-ex+(e^2+1)。$$

5. 当 $a$ 取何值时，直线 $y=x$ 能与曲线 $y=\log_a x$ 相切，切点在哪里？

解 设切点为 $(x_0,x_0)$，由于 $y=x$ 是 $y=f(x)=\log_a x$ 的切线，其斜率为 1，所以 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0\ln a}=1$，故 $x_0=\dfrac{1}{\ln a}$。又由 $f(x_0)=\log_a x_0=\dfrac{\ln x_0}{\ln a}=x_0$，得到 $\ln x_0=1$，即 $x_0=e$，从而 $a=e^{e^{-1}}$，切点为 $(e,e)$。

6．求曲线 $y=x^n$（$n\in\mathbf{N}^+$）上过点 $(1,1)$ 的切线与 $x$ 轴的交点的横坐标 $x_n$，并求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)$。

解　因为 $y'(1)=nx^{n-1}\Big|_{x=1}=n$，所以过点 $(1,1)$ 的切线为 $y=n(x-1)+1$，它与 $x$ 轴交点的横坐标为 $x_n=\dfrac{n-1}{n}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}y(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}。$$

7. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，设集合

$\mathrm{S}_1=\{(x,y)\,|\,$过 $(x,y)$ 可以作该抛物线的两条切线$\}$；

$\mathrm{S}_2=\{(x,y)\,|\,$过 $(x,y)$ 只可以作该抛物线的一条切线$\}$；

$\mathrm{S}_3=\{(x,y)\,|\,$过 $(x,y)$ 不能作该抛物线的切线$\}$，

请分别求出这三个集合中的元素所满足的条件。

解　$a \neq 0$，不妨设$a > 0$，抛物线开口向上。过$(x,y)$可以作该抛物线两条切线当且仅当$(x,y)$在该抛物线的下方，即$y < ax^2 + bx + c$。同理当$a < 0$时，$y > ax^2 + bx + c$，因此

$$S_1 = \{(x,y) \mid a(ax^2 + bx + c - y) > 0\}。$$

过$(x,y)$只可以作该抛物线一条切线当且仅当$(x,y)$在该抛物线上，所以

$$S_2 = \{(x,y) \mid ax^2 + bx + c - y = 0\}。$$

由此得到

$$S_3 = (S_1 \cup S_2)^C = \{(x,y) \mid a(ax^2 + bx + c - y) < 0\}。$$

8.（1） 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，$g(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导，证明 $c_1 f(x) + c_2 g(x)\ (c_2 \neq 0)$ 在$x = x_0$处也不可导。

（2）设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处都不可导，能否断定$c_1 f(x) + c_2 g(x)$在$x = x_0$处一定可导或一定不可导？

解　(1) 记$h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$，当$c_2 \neq 0$时，如果$h(x)$在$x = x_0$处可导，则$g(x) = [h(x) - c_1 f(x)]/c_2$在$x = x_0$处也可导，从而产生矛盾。

(2) 不能断定。如$g(x) = f(x) = |x|$，当$c_1 = -c_2$时，$c_1 f(x) + c_2 g(x)$在$x = 0$处是可导的；当$c_1 \neq -c_2$时，$c_1 f(x) + c_2 g(x)$在$x = 0$处不可导。

9. 在上题的条件下，讨论$f(x)g(x)$在$x = x_0$处的可导情况。

解　函数$f(x) = c$在$x = 0$处可导，$g(x) = |x|$在$x = 0$处不可导，则$f(x)g(x)$当$c = 0$时在$x = 0$处可导，当$c \neq 0$时在$x = 0$处不可导。

函数$f(x) = g(x) = |x|$在$x = 0$处都不可导，但$f(x)g(x) = x^2$在$x = 0$处可导。函数$f(x) = g(x) = \operatorname{sgn}|x|$在$x = 0$处都不可导，$f(x)g(x) = \operatorname{sgn}|x|$在$x = 0$

处也不可导。

10．设 $f_{ij}(x)$ （$i,j=1,2,\cdots,n$）为同一区间上的可导函数，证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}。$$

证 根据行列式的定义

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{d}{dx}\sum(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)} f_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)$$

$$=\sum(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}[f'_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)+f_{1k_1}(x)f'_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)+\cdots$$

$$+f_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f'_{nk_n}(x)]$$

$$=\begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}。$$

# 习　题　4.4　复合函数求导法则及其应用

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2-x+1)^2$；

(2) $y=\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$；

(4) $y=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$；

(5) $y=\sin x^3$；

(6) $y=\cos\sqrt{x}$；

(7) $y=\sqrt{x+1}-\ln(x+\sqrt{x+1})$；

(8) $y=\arcsin(\mathrm{e}^{-x^2})$；

(9) $y=\ln\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(10) $y=\dfrac{1}{(2x^2+\sin x)^2}$；

(11) $y=\dfrac{1+\ln^2 x}{x\sqrt{1-x^2}}$；

(12) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\csc x^2}}$；

(13) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}}$；

(14) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2 x}$；

(15) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

**解**　(1) $y'=2(2x^2-x+1)(2x^2-x+1)'=2(2x^2-x+1)(4x-1)$。

(2) $y'=e^{2x}(\sin 3x)'+(e^{2x})'\sin 3x=e^{2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)$。

(3) $y'=-\dfrac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}(1+x^3)'=-\dfrac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$。

(4) $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{2x^2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}$。

(5) $y'=\cos x^3(x^3)'=3x^2\cos x^3$。

(6) $y'=-\sin\sqrt{x}(\sqrt{x})'=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$。

(7) $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)'}{\sqrt{x+1}}-\frac{(x+\sqrt{x+1})'}{x+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1+2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$

$=\frac{x-1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$。

(8) $y'=\frac{(e^{-x^2})'}{\sqrt{1-(e^{-x^2})^2}}=\frac{-2x\,e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}=\frac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}$。

(9) $y'=[\ln(x^4-1)-\ln(x^2]'=\frac{(x^4-1)'}{x^4-1}-2\frac{1}{x}=\frac{2x^4+2}{x(x^4-1)}$。

(10) $y'=\frac{-2(2x^2+\sin x)'}{(2x^2+\sin x)^3}=\frac{-2(4x+\cos x)}{(2x^2+\sin x)^3}$。

(11) $y'=\frac{(1+\ln^2 x)'x\sqrt{1-x^2}-(1+\ln^2 x)(x\sqrt{1-x^2})'}{x^2(1-x^2)}$

$=\frac{2(1-x^2)\ln x-(1+\ln^2 x)(1-2x^2)}{x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

(12) $y'=\frac{x'\sqrt{1+\csc x^2}-x(\sqrt{1+\csc x^2})'}{1+\csc x^2}$

$=\frac{\sqrt{1+\csc x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(-\cot x^2\csc x^2)\cdot(2x)}{\sqrt{1+\csc x^2}}}{1+\csc x^2}$

$=\frac{1+\csc x^2+x^2\csc x^2\cot x^2}{(1+\csc x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

(13) $y'=(\frac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}})'+(\frac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}})'$

$=2(-\frac{1}{3})(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}(4x)+3(-\frac{1}{4})(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}(9x^2)$

$=-\frac{8}{3}x(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}-\frac{27}{4}x^2(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}$。

(14) $y'=e^{-\sin^2 x}(-\sin^2 x)'=-\sin 2x\cdot e^{-\sin^2 x}$。

（15） $y'=(\frac{x(a^2-x^2)+x}{\sqrt{a^2-x^2}})'=\frac{a^2-3x^2+1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x(a^2-x^2+1)\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-2x)}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}$

$=\frac{2x^4-3a^2x^2+a^4+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

2. 求下列函数的导数：

（1） $y=\ln\sin x$ ；　　（2） $y=\ln(\csc x-\cot x)$ ；

（3） $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$ ；　　（4） $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ ；

（5） $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ .

解　（1） $y'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\cot x$。

（2） $y'=\frac{(\csc x-\cot x)'}{\csc x-\cot x}=\frac{-\cot x\csc x-(-\csc^2 x)}{\csc x-\cot x}=\csc x$。

（3） $y'=\frac{1}{2}\left(x'\sqrt{a^2-x^2}+x(\sqrt{a^2-x^2})'+a^2(\arcsin\frac{x}{a})'\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2}+x(\frac{1}{2})\frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}+a^2\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}, & a>0,\\ -\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}, & a<0.\end{cases}$$ 。

（4） $y'=\frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$。

（5） $y'=\frac{1}{2}[x'\sqrt{x^2-a^2}+x(\sqrt{x^2-a^2})'-a^2\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2-a^2}+x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)-a^2\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]=\sqrt{x^2-a^2}$$ 。

3. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

(1) $f(\sqrt[3]{x^2})$；　(2) $f\left(\frac{1}{\ln x}\right)$；

(3) $\sqrt{f(x)}$；　(4) $\arctan f(x)$；

(5) $f(f(e^{x^2}))$；　(6) $\sin(f(\sin x))$；

(7) $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$；　(8) $\frac{1}{f(f(x))}$.

解　(1) $f(\sqrt[3]{x^2})'=f'(\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2})'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}f'(x^{\frac{2}{3}})$。

(2) $f\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=f'\left(\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=-\frac{1}{x\ln^2 x}f'(\frac{1}{\ln x})$。

(3) $[\sqrt{f(x)}]'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}[f(x)]'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$。

(4) $[\arctan f(x)]'=\frac{1}{1+[f(x)]^2}[f(x)]'=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$。

(5) $[f(f(e^{x^2}))]'=f'(f(e^{x^2}))[f(e^{x^2})]'=f'(f(e^{x^2}))f'(e^{x^2})(e^{x^2})'$

$=2xe^{x^2}f'(e^{x^2})f'(f(e^{x^2}))$。

(6) $[\sin(f(\sin x))]'=\cos(f(\sin x))(f(\sin x))'=\cos(f(\sin x))f'(\sin x)(\sin x)'$

$=\cos(f(\sin x))f'(\sin x)\cos x$。

(7) $\left[f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right]'=f'\left(\frac{1}{f(x)}\right)\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}f'\left(\frac{1}{f(x)}\right)$。

(8) $\left(\frac{1}{f(f(x))}\right)'=-\frac{f'(f(x))}{f^2(f(x))}[f(x)]'=-\frac{f'(f(x))f'(x)}{(f(f(x)))^2}$。

4. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=x^x$；　(2) $y=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\cos^x x$；　(4) $y=\ln^x(2x+1)$；

(5) $y = x\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}$ ；　　　　(6) $y = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ ；

(7) $y = \sin x^{\sqrt{x}}$ .

解　由于$(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$，所以$y' = y(\ln y)'$。

(1) $\ln y = x\ln x$ ,

$y' = y(\ln y)' = y[x'\ln x + x(\ln x)'] = (1+\ln x)x^x$。

(2) $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln\left(x^3+\sin x\right)$，

$$y' = y(\ln y)' = y\left[\left(\frac{1}{x}\right)'\ln\left(x^3+\sin x\right) + \left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(x^3+\sin x\right)'\right]$$

$$=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{3x^2+\cos x}{x(x^3+\sin x)} - \frac{\ln(x^3+\sin x)}{x^2}\right]。$$

(3) $\ln y = x\ln\cos x$，

$y' = y(x\ln\cos x)' = y[x'\ln\cos x + x(\ln\cos x)'] = \left(\ln\cos x - x\tan x\right)\cos^x x$。

(4) $\ln y = x\ln\ln(2x+1)$，

$$y' = y[x'\ln\ln(2x+1) + x(\ln\ln(2x+1))']$$

$$=\left[\ln\ln(2x+1) + \frac{2x}{(2x+1)\ln(2x+1)}\right]\ln^x(2x+1)。$$

(5) $\ln y = \ln x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^3)$，

$$y' = y[(\ln x)' + \frac{1}{2}(\ln(1-x^2))' - \frac{1}{2}(\ln(1+x^3))']$$

$$=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{3x^2}{2(1+x^3)}\right]。$$

(6) $\ln y = \sum_{i=1}^{n}\ln(x - x_i)$，

$$y'=y[\sum_{i=1}^{n}\ln'(x-x_i)]=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}。$$

（7）令$u=x^{\sqrt{x}},\ln u=\sqrt{x}\ln x$，则

$$u'=u[(\sqrt{x})'\ln x+\sqrt{x}(\ln x)']=u(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}})=u(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}})，于是，$$

$$y'=(\sin u)'(u)'=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}\cos x^{\sqrt{x}}。$$

5. 对下列隐函数求$\frac{dy}{dx}$：

(1) $y=x+\arctan y$；　　(2) $y+x\mathrm{e}^{y}=1$；

(3) $\sqrt{x-\cos y}=\sin y-x$；　　(4) $xy-\ln(y+1)=0$；

(5) $e^{x^2+y}-xy^2=0$；　　(6) $\tan(x+y)-xy=0$；

(7) $2y\sin x+x\ln y=0$；　　(8) $x^3+y^3-3axy=0$.

解 （1）在等式两边对$x$求导，得到

$$y'=x'+(\arctan y)'=1+\frac{y'}{1+y^2}，$$

解得

$$y'=\frac{1+y^2}{y^2}。$$

（2）在等式两边对$x$求导，得到

$$y'+x'e^y+xe^yy'=y'(1+xe^y)+e^y=0，$$

解得

$$y'=-\frac{e^y}{1+xe^y}。$$

（3）等式两边平方，再对$x$求导，得到

$$1+\sin y\cdot(y)'=2(\sin y-x)(\cos y\cdot(y)'-1)\text{，}$$

解得

$$y'=\frac{1+2(\sin y-x)}{2(\sin y-x)\cos y-\sin y}\text{。}$$

（4）在等式两边对 $x$ 求导，得到

$$x'y+xy'-[\ln(y+1)]'=y+xy'-\frac{1}{1+y}y'=0\text{，}$$

解得

$$y'=\frac{y^2+y}{1-x-xy}\text{。}$$

（5）在等式两边对 $x$ 求导，得到

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'-(xy^2)'=e^{x^2+y}(2x+y')-(y^2+2xyy')=0\text{，}$$

解得

$$y'=-\frac{2xe^{x^2+y}-y^2}{e^{x^2+y}-2xy}\text{。}$$

（6）在等式两边对 $x$ 求导，得到

$$\sec^2(x+y)(x+y)'-(xy)'=\sec^2(x+y)(1+y')-(y+xy')=0\text{，}$$

解得

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}\text{。}$$

（7）在等式两边对 $x$ 求导，得到

$$2y'\sin x+2y(\sin x)'+(x\ln y)'=2y'\sin x+2y\cos x+\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}=0\text{，}$$

解得

$$y'=-\frac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}。$$

（8）在等式两边对 $x$ 求导，得到

$$3x^2+3y^2y'-3ax'y-3axy'=3(x^2+y^2y'-ay-axy')=0，$$

解得

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}。$$

6． 设所给的函数可导，证明：

⑴ 奇函数的导函数是偶函数；偶函数的导函数是奇函数；

⑵ 周期函数的导函数仍是周期函数。

**证** ⑴设 $f(x)$ 为奇函数，则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[-f(x-\Delta x)]-[-f(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{(-\Delta x)}=f'(x)\ ；$$

设 $f(x)$ 为偶函数，则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{(-\Delta x)}=-f'(x)。$$

（2）设 $f(x)$ 是周期为 $T$ 的函数，则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f((x+T)+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)。$$

7．求曲线 $xy+\ln y=1$ 在 $M(1,1)$ 点的切线和法线方程。

**解** 对方程两边求导，得到 $y+xy'+\frac{y'}{y}=0$，解得 $y'=-\frac{y^2}{xy+1}$，将 $(1,1)$ 代入得到 $y'(1)=-\frac{1}{2}$。于是切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即

$$x+2y-3=0，$$

法线方程为 $y-1=2(x-1)$，即

$$2x-y-1=0。$$

8． 对下列参数形式的函数求 $\frac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=t^2\sin t, \\ y=t^2\cos t; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=a\mathrm{e}^{-t}, \\ y=b\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\mathrm{sh}\, at, \\ y=\mathrm{ch}\, bt; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t}; \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-2t}\cos^2 t, \\ y=\mathrm{e}^{-2t}\sin^2 t; \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$

解：(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{3bt^2}{2at}=\frac{3bt}{2a}$。

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{1-3t^2}{-2t}=\frac{3t^2-1}{2t}$。

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{2t\cos t-t^2\sin t}{2t\sin t+t^2\cos t}=\frac{2\cos t-t\sin t}{2\sin t+t\cos t}$。

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{be^t}{(-ae^{-t})}=-\frac{b}{a}e^{2t}$。

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$。

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{b\mathrm{sh}bt}{a\mathrm{ch}at}$。

(7) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{(1+t^{-1})'}{(1-t^{-1})'}=\frac{-t^{-2}}{t^{-2}}=-1$。

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}}{\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}=-\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$。

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{-2e^{-2t}\sin^2 t+e^{-2t}2\sin t\cos t}{-2e^{-2t}\cos^2 t+e^{-2t}2\cos t(-\sin t)}=\frac{(\sin t-\cos t)\tan t}{\sin t+\cos t}$。

(10) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$。

9．求曲线 $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}$， $y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$ 上与 $t=1$ 对应的点处的切线和法线方程。

解　将 $t=1$ 代入参数方程，有 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}$。经计算，

$$x'(t)=\frac{(2t+t^2)'(1+t^3)-(2t+t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$=\frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2},$$

$$y'(t)=\frac{(2t-t^2)'(1+t^3)-(2t-t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}。$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}。$$

当 $t=1$ 时，$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}}=3$，所以切线方程为

$$y=3(x-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}=3x-4，$$

法线方程为

$$y=-\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}=-\frac{x}{3}+1。$$

10．设方程$\begin{cases}e^{x}=3t^{2}+2t+1,\\ t\sin y-y+\frac{\pi}{2}=0.\end{cases}$确定$y$为$x$的函数，其中$t$为参变量，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

**解**　将$t=0$代入参数方程，可得$e^{x}=1,-y+\frac{\pi}{2}=0$，即$x=0, y=\frac{\pi}{2}$。在两个方程的两端对$t$求导，得到

$$\begin{cases}e^{x}x'=6t+2,\\ \sin y+t\cos y\cdot y'-y'=0,\end{cases}$$

再将$t=0$代入，解得$x'(0)=2, y'(0)=1$。所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{2}{1}=2。$$

11. 证明曲线

$$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}$$

上任一点的法线到原点的距离等于$|a|$。

**证**　利用参数形式所表示的函数的求导公式，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t，$$

曲线在对应于参数$t$的点处的法线方程为

$$y-a(\sin t-t\cos t)=-\cot t(x-a(\cos t+t\sin t))，$$

简化后为

$$\cos t\cdot x+\sin t\cdot y-a=0\text{，}$$

法线到原点的距离为

$$d=\left|\frac{a}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right|=|a|\text{。}$$

12．设函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，$y=f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 处连续。请举例说明，在以下情况中，复合函数 $y=f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 处并非一定不可导：

⑴ $u=g(x)$ 在 $x_0$ 处可导，而 $y=f(u)$ 在 $u_0$ 处不可导；

⑵ $u=g(x)$ 在 $x_0$ 处不可导，而 $y=f(u)$ 在 $u_0$ 处可导；

⑶ $u=g(x)$ 在 $x_0$ 处不可导，$y=f(u)$ 在 $u_0$ 处也不可导。

解 （1） $u=g(x)=x^2, f(u)=|u|, x_0=0, u_0=0, y=f(g(x))=|x^2|=x^2$。

（2） $u=g(x)=|x|, f(u)=u^2, x_0=0, u_0=0, y=f(g(x))=|x|^2=x^2$。

（3） $g(x)=\max\{0,x\},\ f(u)=\min\{0,u\}$，则 $u=g(x)$ 在 $x_0=0$ 处不可导，$y=f(u)$ 在 $u_0=g(0)=0$ 处也不可导，但 $y=f(g(x))\equiv 0$ 处处可导。

13．设函数 $f(u)$，$g(u)$ 和 $h(u)$ 可微，且 $h(u)>1$，$u=\varphi(x)$ 也是可微函数，利用一阶微分的形式不变性求下列复合函数的微分：

⑴ $f(u)g(u)h(u)$；

⑵ $\dfrac{f(u)g(u)}{h(u)}$；

⑶ $h(u)^{g(u)}$；

⑷ $\log_{h(u)} g(u)$；

⑸ $\arctan\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]$；

⑹ $\dfrac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}$.

解 （1） $d[f(u)g(u)h(u)]=[f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)+f(u)g(u)h'(u)]du$

$$=[f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)+f(u)g(u)h'(u)]\varphi'(x)dx\text{。}$$

(2) $d\left[\frac{f(u)g(u)}{h(u)}\right]=\frac{[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]h(u)-[f(u)g(u)]h'(u)}{(h(u))^2}du$

$=\frac{f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)-f(u)g(u)h'(u)}{(h(u))^2}\varphi'(x)dx$。

(3) $d[h(u)^{g(u)}]=\left[e^{g(u)\ln(h(u))}\right]'du=e^{g(u)\ln(h(u))}\left[g(u)\ln(h(u))\right]'du$

$=h(u)^{g(u)}\left[g(u)\frac{h'(u)}{h(u)}+g'(u)\ln h(u)\right]\varphi'(x)dx$。

(4) $d\log_{h(u)}g(u)=d\frac{\ln g(u)}{\ln h(u)}=\frac{[\ln g(u)]'\ln h(u)-\ln g(u)[\ln h(u)]'}{\ln^2 h(u)}du$

$=\frac{h(u)g'(u)\ln h(u)-h'(u)g(u)\ln g(u)}{h(u)g(u)\ln^2 h(u)}\varphi'(x)dx$。

(5) $d\arctan\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]=\frac{\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]'}{1+\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]^2}du=\frac{f'(u)h(u)-f(u)h'(u)}{f^2(u)+h^2(u)}\varphi'(x)dx$。

(6) $d\frac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}=-\frac{\left[f^2(u)+h^2(u)\right]'}{2(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}du=-\frac{f(u)f'(u)+h(u)h'(u)}{(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}\varphi'(x)dx$。

# 习　题　4.5　高阶导数和高阶微分

1. 求下列函数的高阶导数：

(1) $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$，求 $y'''$；

(2) $y = x^4 \ln x$，求 $y''$；

(3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$，求 $y''$；

(4) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$，求 $y''$；

(5) $y = \sin x^3$，求 $y''$、 $y'''$；

(6) $y = x^3 \cos\sqrt{x}$，求 $y''$、 $y'''$；

(7) $y = x^2 \mathrm{e}^{3x}$，求 $y'''$；

(8) $y = \mathrm{e}^{-x^2} \arcsin x$，求 $y''$；

(9) $y = x^3 \cos 2x$，求 $y^{(80)}$；

(10) $y = (2x^2 + 1)\operatorname{sh} x$，求 $y^{(99)}$.

解　(1)　$y' = 3x^2 + 4x - 1,\ y'' = 6x + 4,\ y''' = 6$。

(2)　$y' = 4x^3 \ln x + x^3$，　$y'' = 12x^2 \ln x + 4x^2 + 3x^2 = 12x^2 \ln x + 7x^2$。

(3)　$$y' = \frac{2x\sqrt{1+x} - x^2 \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{4x + 3x^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{(4+6x)(1+x)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}(4x+3x^2)(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2(1+x)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}。$$

(4)　$$y' = x^{-1} \cdot x^{-2} - 2\ln x \cdot x^{-3} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3},$$

$$y'' = -2x^{-1}x^{-3} - 3(1 - 2\ln x)x^{-4} = \frac{6\ln x - 5}{x^4}。$$

(5)　$y' = \cos x^3 \cdot (3x^2) = 3x^2 \cos x^3$，

$$y'' = 6x\cos x^3 + 3x^2(-\sin x^3)(3x^2) = 6x\cos x^3 - 9x^4 \sin x^3,$$

$$y''' = 6\cos x^3 - 6x\sin x^3 \cdot (3x^2) - 36x^3 \sin x^3 - 9x^4 \cos x^3 \cdot (3x^2)$$

$$= -54x^3 \sin x^3 - (27x^6 - 6)\cos x^3。$$

(6)　$$y' = 3x^2 \cos\sqrt{x} + x^3(-\sin\sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = 3x^2 \cos\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} \sin\sqrt{x},$$

$$y''=6x\cos\sqrt{x}+3x^2(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}(\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=(6x-\frac{1}{4}x^2)\cos\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}\text{，}$$

$$y'''=(6-\frac{x}{2})\cos\sqrt{x}+(6x-\frac{x^2}{4})(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{33}{8}x^{\frac{1}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=(6-\frac{15}{8}x)\cos\sqrt{x}+(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\frac{57}{8}x^{\frac{1}{2}})\sin\sqrt{x}\text{。}$$

（7） $y'=2xe^{3x}+x^2e^{3x}(3x)'=(2x+3x^2)e^{3x}$，

$y''=(2+6x)e^{3x}+(2x+3x^2)e^{3x}(3x)'=(9x^2+12x+2)e^{3x}$，

$y'''=(18x+12)e^{3x}+(9x^2+12x+2)e^{3x}(3x)'=(27x^2+54x+18)e^{3x}$。

（8） $y'=(-x^2)'e^{-x^2}\arcsin x+e^{-x^2}(\arcsin x)'=(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}$，

$$y''=(-x^2)'(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}+(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})'e^{-x^2}$$

$$=(-2x)(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}+\left[-2\arcsin x-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}+(-\frac{1}{2})\frac{(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2}$$

$$=\left[2(2x^2-1)\arcsin x+\frac{x(4x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2};$$

（9） $y^{(80)}=x^3\cos^{(80)}2x+C_{80}^1 3x^2\cos^{(79)}2x+C_{80}^2 6x\cos^{(78)}2x+C_{80}^3 6\cos^{(77)}2x$

$$=2^{80}x^3\cos 2x+80\cdot 2^{79}\cdot 3x^2\sin 2x-3160\cdot 2^{78}\cdot 6x\cos 2x-82160\cdot 2^{77}\cdot 6\sin 2x$$

$$=2^{80}\left[x(x^2-4740)\cos 2x+(120x^2-61620)\sin 2x\right]\text{。}$$

（10） $y^{(99)}=(2x^2+1)\mathrm{sh}^{(99)}x+C_{99}^1 4x\,\mathrm{sh}^{(98)}x+C_{99}^2 4\,\mathrm{sh}^{(97)}x$

$$=(2x^2+1)\mathrm{ch}\,x+99\cdot 4x\,\mathrm{sh}\,x+4851\cdot 4\mathrm{ch}\,x$$

$$=(2x^2+19405)\mathrm{ch}x+396x\mathrm{sh}x\text{。}$$

2. 求下列函数的 $n$ 阶导数 $y^{(n)}$：

(1) $y=\sin^2\omega x$；　　(2) $y=2^x\ln x$；

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$；

(5) $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$；　　(6) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解　(1) $y^{(n)}=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\omega x)^{(n)}=-2^{n-1}\omega^n\cos(2\omega x+\dfrac{n}{2}\pi)$

$$=2^{n-1}\omega^n\sin(2\omega x+\frac{n-1}{2}\pi)。$$

(2) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(2^x)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)}=\ln^n 2\cdot 2^x\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k 2^x\ln^{n-k}2\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k-1)}$

$$=2^x\left[\ln^n 2\cdot\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\ln^{n-k}2\cdot\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right]。$$

(3) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^x)^{(n-k)}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^x\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$。

(4) 由于 $y=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}$，

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right]$$

$$=(-1)^n n!\frac{\sum_{k=0}^{n}(x-2)^k(x-3)^{n-k}}{(x-3)^{n+1}(x-2)^{n+1}}=(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-2)^{n-k+1}(x-3)^{k+1}}。$$

(5) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{\alpha x})^{(n-k)}[\cos(\beta x)]^{(k)}=e^{\alpha x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^{n-k}\beta^k\cos(\beta x+\dfrac{k\pi}{2})$。

(6) $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4}，$$

所以

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})。$$

3. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0,\\ -x^2, & x<0\end{cases}$$

的各阶导数。

解 当$x>0$时，$f'(x)=2x$；当$x<0$时，$f'(x)=-2x$。由

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0,$$

可知$f'(x)=2|x|$。

由此得到 $f''(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ -2, & x<0,\\ \text{不存在}, & x=0。\end{cases}$

于是当$n>2$时，$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \text{不存在}, & x=0。\end{cases}$

4．设$f(x)$任意次可微，求

(1) $[f(x^2)]'''$；

(2) $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'''$；

(3) $[f(\ln x)]''$；

(4) $[\ln f(x)]''$；

(5) $[f(e^{-x})]'''$；

(6) $[f(\arctan x)]''$.

解 (1) $[f(x^2)]'=f'(x^2)(x^2)'=2xf'(x^2)$，

$$[f(x^2)]''=2xf''(x^2)(x^2)'+(2x)'f'(x^2)=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2),$$

$$[f(x^2)]'''=4x^2f'''(x^2)(x^2)'+(4x^2)'f''(x^2)+2f''(x^2)(x^2)'=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)。$$

(2) $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$，

$$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]''=-\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'-\left(\frac{1}{x^2}\right)'f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'''=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^6}\left[f'''\left(\frac{1}{x}\right)+6xf''\left(\frac{1}{x}\right)+6x^2f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]。$$

（3） $[f(\ln x)]'=f'(\ln x)(\ln x)'=\dfrac{f'(\ln x)}{x}$，

$$[f(\ln x)]''=\frac{f''(\ln x)(\ln x)'\cdot x-f'(\ln x)(x)'}{x^2}=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}。$$

（4） $[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，

$$[\ln f(x)]''=\frac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}。$$

（5） $[f(e^{-x})]'=f'(e^{-x})(e^{-x})'=-e^{-x}f'(e^{-x})$

$$[f(e^{-x})]''=-e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})'-(e^{-x})'f'(e^{-x})=e^{-2x}f''(e^{-x})+e^{-x}f'(e^{-x}),$$

$$[f(e^{-x})]'''=e^{-2x}f'''(e^{-x})(e^{-x})'+(e^{-2x})'f''(e^{-x})+e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})'+(e^{-x})'f'(e^{-x})$$

$$=-e^{-3x}f'''(e^{-x})-3e^{-2x}f''(e^{-x})-e^{-x}f'(e^{-x})。$$

（6） $[f(\arctan x)]'=f'(\arctan x)(\arctan x)'=\dfrac{f'(\arctan x)}{1+x^2}$，

$$[f(\arctan x)]''=\frac{(1+x^2)f''(\arctan x)(\arctan x)'-(1+x^2)'f'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{f''(\arctan x)-2xf'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}。$$

5．利用 Leibniz 公式计算 $y^{(n)}(0)$：

（1） $y=\arctan x$；

（2） $y=\arcsin x$。

解（1）由 $y'=\dfrac{1}{1+x^2},\ y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，令 $x=0$，可得 $y'(0)=1,\ y''(0)=0$。在等式 $y'(1+x^2)=1$ 两边对 $x$ 求 $n$ 阶导数（$n>1$），得到

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(1+x^2)^{(k)}=0，$$

注意到 $(1+x^2)'''=0$，上式简化为

$$y^{(n+1)}(1+x^2)+ny^{(n)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-1)}\cdot 2=0,$$

以 $x=0$ 代入，得到递推公式

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$

从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{为奇数;}\\ 0, & n\text{为偶数。}\end{cases}$$

（2）由 $y'=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},\ y''=(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)'=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{xy'}{1-x^2}$，令 $x=0$，可得 $y'(0)=1,\ y''(0)=0$，且 $xy'=(1-x^2)y''$。在等式 $xy'=(1-x^2)y''$ 两边对 $x$ 求 $n$ 阶导数（$n\ge 1$），得到

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(x)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+2)}(1-x^2)^{(k)},$$

即

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=y^{(n+2)}(1-x^2)^{(k)}-2xny^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}$$

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=y^{(n+2)}(1-x^2)-2xny^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)},$$

以 $x=0$ 代入，得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0),$$

从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2, & n\text{为奇数；}\\ 0, & n\text{为偶数。}\end{cases}$$

6． 对下列隐函数求 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $e^{x^2+y}-x^2y=0$； (2) $\tan(x+y)-xy=0$；

(3) $2y\sin x+x\ln y=0$； (4) $x^3+y^3-3axy=0$.

解 （1）在等式两边对 $x$ 求导，有

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'-(x^2y)'=e^{x^2+y}(2x+y')-2xy-x^2y'=0\text{，}$$

再对$x$求导，得到

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'(2x+y')+e^{x^2+y}(2x+y')'-(2xy+x^2y')'$$

$$=e^{x^2+y}(2x+y')^2+e^{x^2+y}(2+y'')-2y-4xy'-x^2y''=0\text{，}$$

从而解出

$$y''=\frac{4xy'+2y-e^{x^2+y}[2+4x^2+4xy'+(y')^2]}{e^{x^2+y}-x^2}\text{，}$$

其中$y'=\dfrac{2x(y-e^{x^2+y})}{e^{x^2+y}-x^2}$。

（2）在等式两边对$x$求导，有

$$\sec^2(x+y)(x+y)'-(xy)'=\sec^2(x+y)(1+y')-y-xy'=0\text{，}$$

再对$x$求导，得到

$$2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(x+y)'(1+y')+\sec^2(x+y)(1+y')'-y'-(xy')'$$

$$=2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2+\sec^2(x+y)y''-2y'-xy''=0\text{，}$$

从而解出

$$y''=\frac{2\sec(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2-2y'}{x-\sec^2(x+y)}\text{，}$$

其中$y'=\dfrac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}$。

（3）在等式两边对$x$求导，有

$$2y'\sin x+2y\cos x+\ln y+\frac{x}{y}\cdot y'=0\text{，}$$

再对$x$求导，得到

$$2y''\sin x+4y'\cos x-2y\sin x+2\frac{y'}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot(y')^2+\frac{x}{y}\cdot y''=0\text{，}$$

从而解出

$$y''=\frac{2y^3\sin x-4y^2y'\cos x-2yy'+x(y')^2}{xy+2y^2\sin x}，$$

其中 $y'=-\frac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}$。

（4）在等式两边对 $x$ 求导，有

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0，$$

再对 $x$ 求导，得到

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''-6ay'-3axy''=0，$$

从而解出

$$y''=\frac{2x+2y(y')^2-2ay'}{ax-y^2}，$$

其中 $y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$。

7． 对下列参数形式的函数求 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t, \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=a\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y=b\,\mathrm{e}^{t}, \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t}, \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\sin at, \\ y=\cos bt. \end{cases}$

解 （1） $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(bt^3)''(at^2)'-(bt^3)'(at^2)''}{[(at^2)']^3}=\frac{(6bt)(2at)-(3bt^2)(2a)}{(2at)^3}=\frac{3b}{4a^2t}$。

（2） $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(at\sin t)''(at\cos t)'-(at\sin t)'(at\cos t)''}{[(at\cos t)']^3}$

$$=\frac{(2a\cos t-at\sin t)(a\cos t-at\sin t)+(a\sin t+at\cos t)(2a\sin t+at\cos t)}{a^3(\cos t-t\sin t)^3}$$

$$=\frac{(t^2+2)(\sin^2 t+\cos^2 t)}{a(\cos t-t\sin t)^3}=\frac{t^2+2}{a(\cos t-t\sin t)^3}。$$

（3） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(t\cos t)''[(t(1-\sin t)]'-(t\cos t)'[t(1-\sin t)]''}{[t(1-\sin t)]'^3}$

$$=\frac{(-2\sin t-t\cos t)(1-\sin t-t\cos t)-(\cos t-t\sin t)(-2\cos t+t\sin t)}{(1-\sin t-t\cos t)^3}$$

$$=\frac{t^2+2-2\sin t-t\cos t}{(1-\sin t-t\cos t)^3}。$$

（4） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(be^t)''(ae^{-t})'-(be^t)'(ae^{-t})''}{[(ae^{-t})']^3}=\dfrac{-be^te^{-t}-be^te^{-t}}{-a^2e^{-3t}}=\dfrac{2b}{a^2}e^{3t}$。

（5） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(\sqrt{1-t})''(\sqrt{1+t})'-(\sqrt{1-t})'(\sqrt{1+t})''}{[(\sqrt{1+t})']^3}$

$$=\left[\frac{-1}{4(\sqrt{1-t})^3(2\sqrt{1+t})}-\frac{1}{2(\sqrt{1-t})[4(\sqrt{1+t})^3]}\right](2\sqrt{1+t})^3=-2(1-t)^{-\frac{3}{2}}。$$

（6） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(\cos bt)''(\sin at)'-(\cos bt)'(\sin at)''}{(\sin at)'^3}$

$$=\frac{b(-a\sin at\sin bt-b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}=-\frac{b(a\sin at\sin bt+b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}。$$

8． 利用反函数的求导公式$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$，证明

（1） $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；　　（2） $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

证 （1） $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}(\dfrac{dx}{dy})=\dfrac{d}{dy}(\dfrac{1}{y'})$

$$=-\frac{1}{(y')^2}\frac{dy'}{dy}=-\frac{1}{(y')^2}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}。$$

（2） $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{d}{dy}(\dfrac{d^2x}{dy^2})=\dfrac{d}{dy}[-\dfrac{y''}{(y')^3}]=-\dfrac{1}{(y')^3}\dfrac{dy''}{dy}+3\dfrac{y''}{(y')^4}\dfrac{dy'}{dy}$

$$=-\frac{1}{(y')^3}\frac{dy''}{dx}\frac{dx}{dy}+3\frac{y''}{(y')^4}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{y'''}{(y')^3}\cdot\frac{1}{y'}+\frac{3(y'')^2}{(y')^4}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}。$$

9． 求下列函数的高阶微分：

(1) $y=\sqrt[3]{x-\tan x}$，求 $d^2y$；

(2) $y=x^4e^{-x}$，求 $d^4y$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，求 $d^2y$；

(4) $y=\dfrac{\sec x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 $d^2y$；

(5) $y=x\sin 3x$，求 $d^3y$；

(6) $y=x^x$，求 $d^2y$；

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$，求 $d^ny$；

(8) $y=x^n\cos 2x$，求 $d^ny$.

解 (1) $dy=\dfrac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}(1-\sec^2 x)dx=-\dfrac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}\tan^2 x dx$，

$$d^2y=[-\frac{2}{9}(x-\tan x)^{-\frac{5}{3}}(1-\sec^2 x)^2-\frac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}(2\tan x\sec^2 x)]dx^2$$

$$=\frac{2\tan^4 x+6\sec^2 x\tan x(x-\tan x)}{9(\tan x-x)^{\frac{5}{3}}}dx^2。$$

(2) $$d^4y=\sum_{k=0}^{4}[C_4^k(x^4)^{(k)}(e^{-x})^{(4-k)}]dx^4=\sum_{k=0}^{4}C_4^k\frac{4!}{(4-k)!}x^{4-k}(-1)^{4-k}e^{-x}dx^4$$

$$=(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)e^{-x}dx^4。$$

(3) $$dy=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x)\cdot x-\sqrt{1+x^2}\cdot 1}{x^2}dx=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx，$$

$$d^2y=[\frac{2}{x^3\sqrt{1+x^2}}+\frac{2x}{2x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}]dx^2=\frac{3x^2+2}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx^2。$$

(4) $$dy=[\frac{\tan x\sec x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sec x\cdot(2x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}]dx=\frac{\sec x[(x^2-1)\tan x-x]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx，$$

$$d^2y=\left\{\frac{\sec x\tan x[(x^2-1)\tan x-x]+\sec x[2x\tan x+(x^2-1)\sec^2 x-1]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sec x[(x^2-1)\tan x-x]\cdot(2x)}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right\}dx^2$$

$$=\frac{\sec x[(x^2-1)^2(1+2\tan^2 x)-2x(x^2-1)\tan x+2x^2+1]}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}dx^2。$$

（5） $d^3y=[x(\sin 3x)'''+3x'(\sin 3x)'']dx^3=-27(\sin 3x+x\cos 3x)dx^3$。

（6） $dy=de^{x\ln x}=e^{x\ln x}(1+\ln x)dx=x^x(1+\ln x)dx$，

$$d^2y=[(x^x)'(1+\ln x)+x^x(1+\ln x)']dx=x^x[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}]dx^2。$$

（7） $d^ny=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\ln x)^{(k)}(\frac{1}{x})^{(n-k)}dx^n$

$$=[\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}]dx^n$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)dx^n。$$

（8） $d^ny=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^n)^{(n-k)}(\cos 2x)^{(k)}dx^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{n!}{k!}x^k)[2^k\cos(2x+\frac{k\pi}{2})]dx^n$

$$=(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{2^kx^k\cos(2x+\frac{k\pi}{2})}{(k!)^2(n-k)!}dx^n。$$

10．求$d^2(e^x)$，其中

（1） $x$是自变量; （2） $x=\varphi(t)$是中间变量.

解 （1） $d(e^x)=(e^x)'dx=e^xdx$，

$$d^2(e^x)=d(e^xdx)=(e^x)'dx^2=e^xdx^2。$$

（2） $d(e^x)=(e^x)'dx=e^xdx=e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt$，

$$d^2(e^x)=d(e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt)=[e^{\varphi(t)}\varphi'(t)]'dt^2=e^{\varphi(t)}\left\{[\varphi'(t)]^2+\varphi''(t)\right\}dt^2。$$

11．设$f(u)$，$g(u)$任意次可微，且$g(u)>0$。

（1） 当$u=\tan x$时，求$d^2f$；

（2） 当$u=\sqrt{v}$、$v=\ln x$时，求$d^2g$；

(3) $d^2[f(u)g(u)]$；　　　　(4) $d^2[\ln g(u)]$；

(5) $d^2\left[\dfrac{f(u)}{g(u)}\right]$；

解 (1) $df = f'(u)u'(x)dx = f'(\tan x)\sec^2 xdx$，

$$d^2 f = f''(u)[u'(x)]^2 dx^2 + f'(u)u''(x)dx^2$$

$$=[f''(\tan x)\sec^4 x + 2f'(\tan x)\sec^2 x\tan x]dx^2$$。

(2) $u=\sqrt{v}=\sqrt{\ln x}$，

$$dg=\frac{dg}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}dx=g'(u)\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x}dx=g'(\sqrt{\ln x})\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}dx$$，

$$d^2g=[\frac{g''(u)\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}}{2x\sqrt{\ln x}}-\frac{g'(u)(2x\sqrt{\ln x})'}{(2x\sqrt{\ln x})^2}]dx^2$$

$$=\left\{\frac{g''(u)}{(2x\sqrt{\ln x})^2}-\frac{g'(u)[2\sqrt{\ln x}+2x\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot(\frac{1}{x})]}{(2x\sqrt{\ln x})^2}\right\}dx^2$$

$$=\frac{g''(\sqrt{\ln x})\sqrt{\ln x}-g'(\sqrt{\ln x})(1+2\ln x)}{4x^2\ln^{\frac{3}{2}}x}dx^2$$。

(3) $d[f(u)g(u)]=[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]du$，

$$d^2[f(u)g(u)]=[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]d^2u+[f'(u)g(u)+f(u)g(u)]'du^2$$

$$=[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]d^2u+[f''(u)g(u)+2f'(u)g'(u)+f(u)g''(u)]du^2$$。

(4) $d[\ln g(u)]=\dfrac{g'(u)}{g(u)}du$，

$$d^2[\ln g(u)]=\frac{g'(u)}{g(u)}d^2u+[\frac{g'(u)}{g(u)}]'du^2=\frac{g'(u)}{g(u)}d^2u+\frac{g''(u)g(u)-(g'(u))^2}{g^2(u)}du^2$$。

(5) $d\left[\dfrac{f(u)}{g(u)}\right]=\dfrac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}du$，

$$d^2\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right]=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2u+\left[\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}\right]'du^2$$

$$=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2u+$$

$$\frac{f''(u)g^2(u)-f(u)g(u)g''(u)-2f'(u)g'(u)g(u)+2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)}du^2\text{。}$$

12.利用数学归纳法证明：

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\text{。}$$

**证**　当 $n=1$ 时，$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(e^{\frac{1}{x}})'=e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，命题成立。假设 $n\le k$ 时命题都成立。则当 $n=k+1$ 时，

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\left[(x^ke^{\frac{1}{x}})'\right]^{(k)}=\left[kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}}+x^ke^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})'\right]^{(k)}$$

$$=k\left[x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(k)}-\left[(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}\right]'=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\right]'$$

$$=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})\right]=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}\text{，}$$

命题也成立。由数学归纳法，可知本命题对所有正整数都成立。

# 第五章　微分中值定理及其应用

## 习　题　5.1　微分中值定理

1.　设 $f'_{+}(x_0)>0$， $f'_{-}(x_0)<0$，证明 $x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点。

**证**　由 $f'_{+}(x_0)>0$，可知当 $\delta>0$ 足够小时，若 $0<x-x_0<\delta$，则 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，于是 $f(x)-f(x_0)>0$；同理，由 $f'_{-}(x_0)<0$，可知当 $\delta>0$ 足够小时，若 $-\delta<x-x_0<0$，则 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，于是也有 $f(x)-f(x_0)>0$。从而命题得证。

2.（Darboux 定理）设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上可导， $x_1,x_2\in(a,b)$。如果 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$，证明在 $x_1$ 和 $x_2$ 之间至少存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)=0$。

**证**　显然 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$。若 $f'(x_1)>0$，则 $f'(x_2)<0$，仿照习题 1 可证存在 $x_1<x_3<x_4<x_2$，使得 $f(x_1)<f(x_3)$， $f(x_2)<f(x_4)$，从而 $x_1,x_2$ 都不是 $f(x)$ 的最大值点，于是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 的最大值点 $\xi\in(x_1,x_2)$，并且成立 $f'(\xi)=0$。若 $f'(x_1)<0$，则 $f'(x_2)>0$，同样可证 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 的最小值点 $\xi\in(x_1,x_2)$，并且成立 $f'(\xi)=0$。

3.　举例说明 Lagrange 中值定理的任何一个条件不满足时，定理结论就有可能不成立。

**解**　$[-1,1]$ 上的符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 在 $x=0$ 不连续，所以 Lagrange 中值定理的条件不满足。而 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1$，不存在 $\xi\in(-1,1),\ f'(\xi)=1$。

$[-1,1]$ 上的绝对值函数 $|x|$ 连续，但在 $x=0$ 不可微，所以 Lagrange 中值

定理的条件不满足。而$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0$，但$\forall\xi\in(-1,1),\xi\neq 0, f'(\xi)=\pm 1\neq 0$。

4. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$上可微。利用辅助函数

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$$

证明 Lagrange 中值定理，并说明$\psi(x)$的几何意义。

**证** 显然$\psi(a)=\psi(b)=0$，并且满足 Rolle 定理条件。由 Rolle 定理，在$(a,b)$内存在一点$\xi$，使得

$$\psi'(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) & 0 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}=f'(\xi)(b-a)-[f(b)-f(a)]=0,$$

所以 Lagrange 中值定理成立。

几何意义：以$(x,f(x)),(a,f(a)),(b,f(b))$顶点的三角形如果顶点逆时针排列，则$\psi(x)$就是三角形面积的两倍，否则$-\psi(x)$就是三角形面积的两倍。

5. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$上可导，证明$(a,b)$内存在一点$\xi$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}。$$

**证** 令$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}(x-a)-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，则$F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理，在$(a,b)$内存在一点$\xi$，使得

$$F'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}=0。$$

6. 设非线性函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$上可导，则在$(a,b)$上

至少存在一点$\eta$，满足

$$|f'(\eta)|>|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|，$$

并说明它的几何意义。

**证** 由于$f(x)$是非线性函数，所以在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使得$(\xi,f(\xi))$不在$(a,f(a)),(b,f(b))$的连线上。

假设$(\xi,f(\xi))$在$(a,f(a)),(b,f(b))$的连线的上方，则

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}，$$

利用 Lagrange 中值定理，存在$\xi_1\in(a,\xi),\xi_2\in(\xi,b),$ 使得

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\xi_2)，$$

所以$\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}>|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。当$(\xi,f(\xi))$在$(a,f(a)),(b,f(b))$的连线下方时同理可证。

几何意义：在$[a,b]$上连续、在$(a,b)$上可导的非线性函数，必定在某点切线斜率的绝对值大于$[a,b]$间割线斜率的绝对值。

7．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$，其中$a\neq 0$为常数。

**解** 由 Lagrange 中值定理，$\dfrac{\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$，其中$\xi$位于$\dfrac{a}{n+1}$与$\dfrac{a}{n}$之间。当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{1+\xi^2}$趋于$1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}\cdot\frac{\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\right)=a。$$

8． 用 Lagrange 公式证明不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$；

(2) $ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\quad(n>1,\ x>y>0)$；

(3) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}\quad(b>a>0)$；

(4) $\mathrm{e}^x>1+x\quad(x>0)$．

证 (1) $|\sin x-\sin y|=|\cos\xi\cdot(x-y)|\le|x-y|$。

(2) $x^n-y^n=n\xi^{n-1}(x-y),$ 其中 $x>\xi>y>0$。由 $x^{n-1}>\xi^{n-1}>y^{n-1}>0$ 得到

$$ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\quad(n>1,\ x>y>0)。$$

(3) $\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a)$，其中 $b>\xi>a>0$。由于 $\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$，所以

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}。$$

(4) $\mathrm{e}^x-1=e^x-e^0=e^{\xi}(x-0)>x,\quad x>\xi>0$。

9． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，且对任何实数 $x_1$ 和 $x_2$，满足

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2，$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数。

证 首先由 $|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2$ 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。对任意固定的 $x_2\in(a,b)$，$\lim\limits_{x_1\to x_2}\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\le\lim\limits_{x_1\to x_2}|x_1-x_2|=0$，故 $f'(x_2)=0$，再由 $x_2$ 的任意性，得到 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 上恒等于 0。所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数。

10． 证明恒等式

(1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$， $x\in[0,1]$ ；

(2) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$， $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ；

(3) $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi$， $x\in[1,+\infty)$.

**证**（1）令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,\forall x\in(0,1)\text{。}$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(0)=\frac{\pi}{2}$。

（2）令 $f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$，注意到 $1-4x^2\ge 0,\forall x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，所以

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\equiv 0,\forall x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\text{。}$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(0)=3\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$。

(3) 令 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$，注意到 $x^2-1>0,\forall x>1$，所以

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\equiv 0,\forall x>1\text{。}$$

由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(1)=2\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\pi$。

11．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导。证明：若 $(a,b)$ 中除至多有限个点有 $f'(x)=0$ 之外，都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加；同时举例说明，其逆命题不成立。

**证** 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 是 $f'(x)$ 全部的零点。则 $f(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 上严格单调增加。从而，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加。

构造函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 3\cdot 2^{-(n+2)}+2^{-(n+2)}\cos(\frac{1}{x}-n)\pi, & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n},n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

由于 $f(\frac{1}{n})=2^{-n}=f(\frac{1}{n}+)$， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。因为当 $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$ 时，

$f'(x)=\frac{2^{-(n+2)}}{x^2}\sin(\frac{1}{x}-n)\pi>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 严格单调增加。但 $f'(\frac{1}{n})=0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有无限多个零点。

12． 证明不等式：

（1） $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$；

（2） $3-\frac{1}{x}<2\sqrt{x},\quad x>1$；

（3） $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\quad x>0$；

（4） $\tan x+2\sin x>3x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；

（5） $\frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1,\quad x\in[0,1], (p>1)$；

（6） $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}$， $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

证（1）令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$， $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，由于

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

可知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 严格单调减少，所以 $\frac{2}{\pi}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}<\frac{\sin x}{x}<\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，从而得到

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x,\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})。$$

（2）令 $f(x)=2\sqrt{x}-(3-\frac{1}{x})$，则 $f(1)=0$，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}>0,\ x>1，$$

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 严格单调增加，故 $f(x)>0$，从而

$$3-\frac{1}{x}<2\sqrt{x},\quad x>1。$$

（3）令 $f(x)=\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2})$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,\quad x>0，$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调增加，由 $f(0)=0$ 知 $f(x)>0,\forall x>0$，从而

$$\ln(1+x)>(x-\frac{x^2}{2}),\quad x>0。$$

令 $g(x)=x-\ln(1+x)$，则

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0,\quad x>0，$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调增加，由 $g(0)=0$ 知 $g(x)>0,\forall x>0$，从而

$$x>\ln(1+x),\quad x>0。$$

（4）令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$，则 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2})$，

$$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3\ge 3\sqrt[3]{\sec^2 x\cos x\cos x}-3=0，$$

等号仅在 $x=0$ 成立，所以 $f(x)$ 严格单调增加，从而 $f(x)>0$，即

$$\tan x+2\sin x>3x，\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})。$$

（5）令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，则 $f'(x)=p(x^{p-1}-(1-x)^{p-1})$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 取负值，在 $(\frac{1}{2},1)$ 取正值，即 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 严格单调减少，在 $[\frac{1}{2},1]$ 严格单调增加，所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 取到最小值 $\frac{1}{2^{p-1}}$。又 $f(0)=f(1)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 取到最大值 $1$，因而成立

$$\frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1，\quad x\in[0,1]。$$

（6）令 $f(x)=\sin x\tan x-x^2$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。则

$$f'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x，\qquad f''(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}-2。$$

显然 $f''(x)>0$，由 $f'(0)=0$，可知 $f'(x)>0$。再由 $f(0)=0$，得到 $f(x)>0$，从而

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}，\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)。$$

13． 证明：在 $(0,1)$ 上成立

（1） $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$ ；

（2） $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$。

证 （1）令 $f(x) = x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)$，则

$$f'(x) = 2x - \ln^2(1+x) - 2\ln(1+x)，$$

$$f''(x) = 2 - 2\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2}{1+x} = \frac{2(x - \ln(1+x))}{1+x} > 0, \quad x \in (0,1)。$$

由 $f'(0) = 0$，可知 $f'(x) > 0$，再由 $f(0) = 0$，得到 $f(x) > 0$，即

$$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2, x \in (0,1)。$$

（2） 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$，由（1），

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)} < 0, \quad x \in (0,1)，$$

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调减少。再由 $f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$ 与

$f(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$，得到

$$\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}，\quad x \in (0,1)。$$

14． 对于每个正整数 $n$ （$n \ge 2$），证明方程

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$$

在 $(0,1)$ 内必有唯一的实根 $x_n$，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

证 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$，则当 $x \in (0,1)$ 时，

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 0，$$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 严格单调增加，且当 $n\ge 2$ 时， $f_n(0)=-1, f_n(1)=n-1>0$，所以 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一的实根 $x_n$。显然 $\{x_n\}$ 单调减少有下界，所以必定收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $0\le a<1$，且当 $n\ge 2$ 时，$0<x_n\le x_2<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$。于是有

$$1=\lim_{n\to\infty}(x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=\frac{a}{1-a},$$

解得 $a=\dfrac{1}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}。$$

15．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$。证明：

（1）存在 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\xi)=\xi$；

（2）对于任意实数 $\lambda$，必存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1。$$

证（1）令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且有

$$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0, F(1)=-1<0,$$

所以存在 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

（2）令 $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，则 $G(0)=G(\xi)=0$，应用 Rolle 定理，必存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$G'(\eta)=e^{-\lambda\eta}[f'(\eta)-1]-\lambda e^{-\lambda\eta}[f(\eta)-\eta]=0,$$

于是成立 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$。

16．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导，且 $g'(x)\ne 0\ (x\in(a,b))$。分别利用辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

和

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1\\ g(a) & f(a) & 1\\ g(b) & f(b) & 1\end{vmatrix},$$

证明 Cauchy 中值定理，并说明$\varphi(x)$和$\psi(x)$的几何意义。

**证** 由于$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，应用 Rolle 定理，必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立。

$\varphi(t)$的几何意义：参数方程$\begin{cases}x=g(t)\\ y=f(t)\end{cases}$所表示的曲线上点的纵坐标与连接点$(g(a),f(a))$和点$(g(b),f(b))$的直线段上点的纵坐标之差。

由于$\psi(a)=\psi(b)=0$，应用 Rolle 定理，必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\psi'(\xi)=\begin{vmatrix}g'(\xi)&f'(\xi)&0\\ g(a)&f(a)&1\\ g(b)&f(b)&1\end{vmatrix}=g'(\xi)[f(a)-f(b)]-f'(\xi)[g(a)-g(b)]=0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立。

$\psi(x)$的几何意义：其绝对值等于由$(g(x),f(x)),(g(a),f(a)),(g(b),f(b))$为顶点的三角形面积的两倍，如果三顶点按照逆时针方向排列，则$\psi(x)$的符号为正，否则为负。

17． 设$a,b>0$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)。$$

**证** 令$g(x)=x^2$，对$f(x),g(x)$应用 Cauchy 中值定理，可知必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

从而

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)。$$

18． 设$a,b>0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)。$$

**证** 对于$f(x)=\dfrac{e^x}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$应用 Cauchy 中值定理，可知必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=(1-\xi)e^{\xi},$$

整理后即得到

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)。$$

19． 设$f(x)$在$[a,b]$上连续（$ab>0$），在$(a,b)$上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\xi f'(\xi)-f(\xi)。$$

证 对 $\frac{f(x)}{x}$ 与 $\frac{1}{x}$ 应用 Cauchy 中值定理，可知必定存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=-[f'(\xi)\xi-f(\xi)]，$$

于是成立

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=f'(\xi)\xi-f(\xi)，$$

整理后即可得命题成立。

20．设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，在 $(1,+\infty)$ 上可导，已知函数 $e^{-x}f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界，证明函数 $e^{-x}f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上也有界。

证 首先 $e^{-x}f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，所以有界。当 $x>2$ 时，由 Cauchy 中值定理，

$$|e^{-x}f(x)|<\frac{|f(x)-f(1)|}{e^x}+\frac{|f(1)|}{e^2}<\frac{|f(x)-f(1)|}{e^x-e^1}+\frac{|f(1)|}{e^2}=\left|e^{-\xi}f'(\xi)\right|+\frac{|f(1)|}{e^2}$$

也是有界的，所以 $e^{-x}f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界。

21． 设 $f'(x)$ 在 $(0,a]$ 上连续，且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续。

证 由于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}}=2\sqrt{\xi}f'(\xi)，$$

所以只要证明 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,a]$ 上有界就可以了。显然 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,a]$ 连续，且极限 $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)$ 存在而且有限，所以 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,a]$ 上有界。

22. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有 $n$ 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，用 Cauchy 中值定理证明

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1)。$$

证 反复使用 Cauchy 中值定理，

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{\,n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{\,n-1}-n0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{\,n-2}}$$

$$=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!(\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},\quad \xi_n\in(0,x)，$$

所以存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $\xi_n=\theta x$，命题成立。

23． 证明不等式：

（1）$\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$, $x,y>0,n>1$；　　（2）$\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$，　$x\ne y$.

证（1）设 $f(x)=x^n$，则当 $n>1$ 时

$$f'(x)=nx^{n-1}$$
$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0,\quad \forall x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\ x,y>0。$$

（2）设 $f(x)=e^x$，则

$$f'(x)=f''(x)=e^x>0，\quad x\in(-\infty,+\infty)，$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},\quad x\ne y。$$

24．　（Jensen 不等式）设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续下凸函数，证明对于任意 $x_i\in[a,b]$ 和 $\lambda_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$），$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$，成立

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)。$$

证 应用数学归纳法。当 $k=2$ 时，由下凸函数定义知 Jensen 不等式成立。现假设当 $k=n-1$ 时 Jensen 不等式成立，则当 $k=n$ 时，

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)=f\left((\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}+\lambda_n x_n\right)$$
$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}\right)+\lambda_n f(x_n)$$
$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}f(x_i)+\lambda_n f(x_n)=\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)。$$

所以 Jensen 不等式对一切 $n$ 成立。

25．　利用上题结论证明：对于正数 $a,b,c$ 成立

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^a b^b c^c。$$

证 设 $f(x)=x\ln x$，则

$$f'(x)=1+\ln x,$$
$$f''(x)=\frac{1}{x}>0,\quad \forall x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},\quad \forall a,c,b>0.$$

利用平均值不等式$\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3},\quad \forall a,b,c>0$，得到

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},$$

即

$$(a+b+c)\ln\sqrt[3]{abc}=\ln(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a\ln a+b\ln b+c\ln c=\ln(a^a b^b c^c),$$

命题得证。

26． 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，并且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

证 由$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，可知$\forall\varepsilon>0,\exists X'>0,\forall x>X'$，成立$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$。取定$x_0\ge X'$，则$\exists X>x_0,\forall x>X$，成立$\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，应用 Lagrange 中值定理，则有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{f(x_0)}{x}+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{x}\right|\le\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|+\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x}\right|$$

$$=\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|+|f'(\xi)|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\text{，}$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$成立。

27．设$f(x)$在$[a,b]$连续，在$(a,b)$二阶可导，证明存在$\eta\in(a,b)$，成立

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)\text{。}$$

证 设$g(x)=f(x)-f(x-\frac{b-a}{2})$。由于

$$g(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(a),\quad g(b)=f(b)-f(\frac{a+b}{2}),$$

在区间$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$上对$g(x)$应用 Lagrange 中值定理，即得到

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=g(b)-g(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)(\frac{b-a}{2})$$

$$=[f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2})](\frac{b-a}{2})=f''(\eta)(\frac{b-a}{2})^2\text{。}$$

# 习　题　5.2　L'Hospital 法则

1.　对于

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty \text{ 或 } -\infty$$

的情况证明 L'Hospital 法则。

**证**　设 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，则 $\forall G>0,\exists\delta>0,\forall x\in(a,a+\delta),\frac{f'(x)}{g'(x)}>G+1$。

首先考虑 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$ 的情况，补充定义 $f(0)=g(0)=0$，则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,d]$ 连续，满足 Cauchy 中值定理条件。当 $x\in(a,a+\delta)$ 时

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>G,\quad a<\xi<x<a+\delta\text{，}$$

所以

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty\text{。}$$

再考虑 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$ 的情况，任取 $x_0\in(a,a+\delta)$，再取 $0<\delta_1<x_0-a$，使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，$\max\{|\frac{g(x_0)}{g(x)}|,|\frac{f(x_0)}{g(x)}|\}\le\frac{1}{2}$，于是由

$$\frac{f(x)}{g(x)}=[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}=[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}\text{，}$$

可得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时

$$|\frac{f(x)}{g(x)}|\ge\frac{1}{2}(G+1)-\frac{1}{2}=\frac{G}{2}\text{，}$$

所以

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty\text{。}$$

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$的情况即为$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{-f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，所以 L'Hospital 法则也成立。

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}$;

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$;

(15) $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$;

(16) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

(17) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$;

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(19) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

(20) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 （1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(-e^{-x})}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$。

（2） $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{3}{5}$。

（3） $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{2(\pi-2x)(-2)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-4(-2)}=-\dfrac{1}{8}$。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{m}{n}x^{m-n}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$。

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\cot 7x\sec^2 7x\cdot 7}{\cot 2x\sec^2 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{7\sin 2x\cos 2x}{2\sin 7x\cos 7x}$

$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{7\sin 4x}{2\sin 14x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{28\cos 4x}{28\cos 14x}=1$。

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x}{\cos 3x}=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x}{-3\sin 3x}=\dfrac{1}{3}$。

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[\ln(1+x)]'-(\ln x)'}{-\dfrac{1}{1+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1-x^2)[\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x(1+x)}=1$。

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x+\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{2}{1+x^2}\cdot\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=1$。

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+1+1}=\dfrac{1}{2}$。

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{2x}\right)\cdot 1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2}=0$。

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}=1$。

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{3x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}\cdot 1=\frac{2}{3}\text{。}$$

（13） $\lim_{x\to 0}x\cot 2x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos 2x}\cdot 1=\frac{1}{2}$。

（14） $\lim_{x\to 0}x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^y}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^y}{1}=+\infty$。

（15） $\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{(\pi-x)}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to\pi}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}\cdot 1=2$。

（16） $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}\text{，}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}\text{。}$$

（17） $\lim_{x\to 0+}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(-\frac{1}{x})}{(-\csc^2 x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x}=0$，

所以

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=1\text{。}$$

（18） $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}$，

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2\,\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\text{。}$$

（19） $\lim_{x\to 0+}\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(-\ln x)}{\csc x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{(-\ln x)(-x)}}{(-\csc x)(\cot x)}$

$$=\lim_{x\to 0+}(-\frac{\sin x}{x})(\frac{\tan x}{\ln x})=0,\quad (\lim_{x\to 0+}\frac{\tan x}{\ln x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\tan x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\cos^2 x}=0)$$

所以

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^0=1。$$

（20） $\lim_{x\to 1}\ln(x^{\frac{1}{1-x}})=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{(-1)}=-1$，

所以

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}。$$

3. 说明不能用 L'Hospital 法则求下列极限：

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；　　(2) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$；

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$；　　(4) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}$.

解（1）因为当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{d}{dx}\sin x}=\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 极限不存在，所以

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 不能用 L'Hospital 法则求极限。

事实上，$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}(\frac{x}{\sin x})\cdot\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=1\cdot 0=0$，极限存在。

（2）因为当 $x\to +\infty$ 时，$\dfrac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 极限不存在，所以 $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 不能用 L'Hospital 法则求极限。

事实上，$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=1$，极限存在。

（3）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{*}{\infty}$型的待定型，所以不能用 L'Hospital 法则求极限。事实上，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)\sin x}{\lim\limits_{x\to1}\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{2\sin1}{\ln2}$。

（4）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{*}{\infty}$型的待定型，所以不能用 L'Hospital 法则求极限。事实上，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x})}{\lim\limits_{x\to1}x}=\dfrac{1+e^2}{1}=1+e^2$。

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中$g(0)=0$，$g'(0)=0$，$g''(0)=10$。求$f'(0)$。

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{2(x-0)}=\dfrac{1}{2}g''(0)=5$。

5. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leq0,\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性。

解 显然函数$f(x)$在$x=0$处左连续。下面考虑$f(x)$在$x=0$处的右连续性。当$x>0$时，

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-\ln e\right]=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2},$$

于是

$$\lim_{x\to 0+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}，$$

由对数函数的连续性，$\lim_{x\to 0+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续。

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

6．设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，证明 $\lim_{x\to 0+}x^{f(x)}=1$。

**证** $\lim_{x\to 0+}\ln x^{f(x)}=\lim_{x\to 0+}[f(x)\ln x]=\lim_{x\to 0+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot(x\ln x)\right]=f'(0)\cdot 0=0$，

所以

$$\lim_{x\to 0+}x^{f(x)}=e^0=1。$$

7．设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$，证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=k$。

**证** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$。

# 习　题　5.3　Taylor 公式和插值多项式

1．由 Lagrange 中值定理知

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta(x)x}，\quad 0<\theta(x)<1，$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=1/2$。

证　由$\theta(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$，取极限即得到

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{1+x}}=(\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)})\cdot 1=\frac{1}{2}。$$

2．设 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$，　$(0<\theta<1)$，

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

证　$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$

$$=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1}+\circ(h^{n+1})，$$

于是

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+\circ(1)。$$

令$h\to 0$，得到

$$\lim_{h\to 0}\theta\cdot f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)，$$

再由 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，两边消去 $f^{(n+1)}(x)$，即得到$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

3．设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，取结点为 $x=1$、$1.728$、$2.744$，求 $f(x)$的二次插值多项式 $p_2(x)$及其余项的表达式，并计算 $p_2(2)$　（$\sqrt[3]{2}=1.2599210\cdots$）。

**解** $f(1)=1, f(1.728)=1.2, f(2.744)=1.4$，由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx p_2(x)\\
&=1\cdot\frac{(x-1.728)(x-2.744)}{(1-1.728)(1-2.744)}+1.2\cdot\frac{(x-1)(x-2.744)}{(1.728-1)(1.728-2.744)}+1.4\cdot\frac{(x-1)(x-1.728)}{(2.744-1)(2.744-1.728)}\\
&\approx 0.7876(x-1.728)(x-2.744)-1.6224(x-1)(x-2.744)+0.7901(x-1)(x-1.728)\\
&=-0.04465x^2+0.3965x+0.6481。
\end{aligned}
$$

$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$， 余项 $r_2(x)=\frac{5}{81\xi^{\frac{8}{3}}}(x-1)(x-1.728)(x-2.744)$。

$p_2(2)\approx 1.2626$。

4．设 $f(x)=2^x$，取结点为 $x=-1$、0、1，求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式，并计算 $p_2\left(\frac{1}{3}\right)$。请与上题的计算结果相比较并分析产生差异的原因。

**解** $f(-1)=0.5, f(0)=1, f(1)=2$，由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx p_2(x)\\
&=0.5\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}+1\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}+2\cdot\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}\\
&=0.25x(x-1)-(x-1)(x+1)+(x+1)x\\
&=0.25x^2+0.75x+1。
\end{aligned}
$$

$f'''(x)=\ln^3 2\cdot 2^x$， 余项 $r_n(x)=\frac{\ln^3 2}{6}2^{\xi}(x+1)x(x-1)$。

$p_2(\frac{1}{3})\approx 1.2778$。

与上题相比，本题误差较大的原因是 2 不在所取的三点 $x=-1$、0、1 之间，而上题 2 在所取的三点 $x=1$、1.728、2.744 之间，因而误差较小。

5．设 $f(x)$ 在若干个测量点处的函数值如下：

| $x$ | 1.4 | 1.7 | 2.3 | 3.1 |
|---|---|---|---|---|

| $f(x)$ | 65 | 58 | 44 | 36 |
|---|---|---|---|---|

试求 $f(2.8)$ 的近似值。

解　由 Lagrange 插值公式

$$f(x) \approx p_3(x)$$
$$= 65 \cdot \frac{(x-1.7)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.4-1.7)(1.4-2.3)(1.4-3.1)} + 58 \cdot \frac{(x-1.4)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.7-1.4)(1.7-2.3)(1.7-3.1)}$$
$$+44 \cdot \frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-3.1)}{(2.3-1.4)(2.3-1.7)(2.3-3.1)} + 3.6 \cdot \frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-2.3)}{(3.1-1.4)(3.1-1.7)(3.1-2.3)},$$

$f(2.8) \approx p_3(2.8) \approx 36.647$。

6．若 $h$ 是小量，问如何选取常数 $a$、$b$、$c$，才能使得

$af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$ 与 $f''(x)$ 近似的阶最高？

解 $af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$

$$= a[f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2]+bf(x)+c[f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2]+o(h^2)$$
$$= (a+b+c)f(x)+(a-c)f'(x)h+\frac{1}{2}(a+c)f''(x)h^2+o(h^2),$$

得到方程组 $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ a+c=2 \end{cases}$，解之得到 $a=c=1, b=-2$。

7．将插值条件取为 $n+1$ 个结点上的函数值和一阶导数值，即

$p_n(x)$ 满足

$$\begin{cases} p_n(x_i) = f(x_i) \\ p_n'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

的插值多项式称为 **Hermite** 插值多项式，在微分方程数值求解等研究领域中具有重要作用。它可以取为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[ f(x_k)q_k^{(0)}(x) + f'(x_k)\, q_k^{(1)}(x) \right],$$

这里，$\{q_k^{(0)}(x), q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n}$ 是满足条件

$$q_k^{(0)}(x_i)=\delta_{ik},\quad [q_k^{(0)}]'(x_i)=0,\qquad\qquad i,\ k=0,1,2,\cdots,n$$

和

$$q_k^{(1)}(x_i)=0,\quad [q_k^{(1)}]'(x_i)=\delta_{ik},\qquad\qquad i,\ k=0,1,2,\cdots,n$$

的基函数。试仿照 Lagrange 插值多项式的情况构造$\{q_k^{(0)}(x),q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^n$。

解　显然当$i\neq k$时，$q_k^{(0)}(x_i)=[q_k^{(0)}]'(x_i)=0,\ q_k^{(0)}(x_k)=1,[q_k^{(0)}]'(x_k)=0$，设

$q_k^{(0)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right][1-c(x-x_k)]$，由$[q_k^{(0)}]'(x_k)=\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n\frac{2}{x_k-x_i}-c=0$解出$c$，得

到

$$q_k^{(0)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right][1-(\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n\frac{2}{x_k-x_i})(x-x_k)],\quad k=0,1,2,\cdots,n\ ;$$

同理可得到

$$q_k^{(1)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right](x-x_k)\qquad k=0,1,2,\cdots,n。$$

# 习　题　5.4　函数的 Taylor 公式及其应用

1. 求下列函数在 $x=0$ 处的 Taylor 公式（展开到指定的 $n$ 次）：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$， $n=4$；　　(2) $f(x)=\cos(x+\alpha)$，$n=4$；

(3) $f(x)=\sqrt{2+\sin x}$， $n=3$；　　(4) $f(x)=e^{\sin x}$，$n=4$；

(5) $f(x)=\tan x$， $n=5$；　　(6) $f(x)=\ln(\cos x)$，$n=6$；

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$， $n=4$　　(8) $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$n=4$

(9) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$，$n=3$.

解（1） $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$

$$=1+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}(-x)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 2\end{pmatrix}(-x)^2+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 3\end{pmatrix}(-x)^3+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 4\end{pmatrix}(-x)^4+\circ(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{4}{2\cdot 9}x^2+\frac{28}{6\cdot 27}x^3+\frac{280}{24\cdot 81}x^4+\circ(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+\frac{14}{81}x^3+\frac{35}{243}x^4+\circ(x^4)\text{。}$$

（2） $f(x)=\cos(x+\alpha)=\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha$

$$=(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))\cos\alpha-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))\sin\alpha$$

$$=\cos\alpha-\sin\alpha\cdot x-\frac{\cos\alpha}{2!}x^2+\frac{\sin\alpha}{3!}x^3+\frac{\cos\alpha}{4!}x^4+o(x^4)\text{。}$$

（3） $f(x)=\sqrt{2+\sin x}=\sqrt{2(1+\dfrac{\sin x}{2})}=\sqrt{2}[1+\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3))]^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3]$$

$$=\sqrt{2}[1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{128}+o(x^3)]=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{32}x^2-\frac{13\sqrt{2}}{384}x^3+o(x^3)。$$

(4)　$f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}=\mathrm{e}^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$

$$=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$
$$=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^4}{3})+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$
$$=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)。$$

(5)　$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5))(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))^{-1}$$
$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5))(1+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})^2+o(x^5))$$
$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120})+(x-\frac{x^3}{6})\frac{x^2}{2}+x\cdot\frac{5x^4}{24}+o(x^5)$$
$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)。$$

(6)　$f(x)=\ln(\cos x)=\ln(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6))$

$$=(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720})-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^2+\frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2})^3+o(x^6)$$
$$=(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720})-\frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24})-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{8}+o(x^6)$$
$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)。$$

(7)　$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$$=[1+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4))]^{-1}$$

$$=1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24})^2-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})^3+(\frac{x}{2})^4+o(x^4)$$
$$=1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120})+(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72})-(\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8})+\frac{x^4}{16}+o(x^4)$$

$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+o(x^4)$。

（8） $f(x)=\ln(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4))=(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120})-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{6})^2+o(x^4)$

$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4)$。

（9） $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}=[1+(-2x+x^3)]^{\frac{1}{2}}-[1+(-3x+x^2)]^{\frac{1}{3}}$

$=[1+\frac{1}{2}(-2x+x^3)-\frac{1}{8}(-2x)^2+\frac{1}{16}(-2x)^3+o(x^3)]$

$-[1+\frac{1}{3}(-3x+x^2)-\frac{1}{9}(-3x+x^2)^2+\frac{5}{81}(-3x)^3+o(x^3)]$

$=(1-x-\frac{1}{2}x^2)-(1-x-\frac{2}{3}x^2-x^3)+o(x^3)$

$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$。

2. 求下列函数在指定点处的 Taylor 公式：

(1) $f(x)=-2x^3+3x^2-2$，$x_0=1$　　(2) $f(x)=\ln x$，$x_0=\mathrm{e}$；

(3) $f(x)=\ln x$；$x_0=1$　　(4) $f(x)=\sin x$，$x_0=\frac{\pi}{6}$；

(5) $f(x)=\sqrt{x}$，$x_0=2$.

解（1） $f(x)=-2x^3+3x^2-2=-2[(x-1)+1]^3+3[(x-1)+1]^2-2$

$=[-2(x-1)^3-6(x-1)^2-6(x-1)-2]+[3(x-1)^2+6(x-1)+3]-2$

$=-1-3(x-1)^2-2(x-1)^3$。

（2） $f(x)=\ln x=\ln[(x-e)+e]=\ln e+\ln(1+\frac{x-e}{e})$

$=1+\frac{1}{e}(x-e)-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{ne^n}(x-e)^n+\circ\left((x-e)^n\right)$。

（3） $f(x)=\ln x=\ln(1+(x-1))$

$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\circ\left((x-1)^n\right)$。

（4） $f(x)=\sin x$， $f^{(n)}(x_0)=\sin(x_0+\frac{n\pi}{2})$，

$$f(x)=f(\frac{\pi}{6})+f'(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})+\frac{f''(\frac{\pi}{6})}{2!}(x-\frac{\pi}{6})^2+\frac{f'''(\frac{\pi}{6})}{3!}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{6})}{n!}(x-\frac{\pi}{6})^n+o\left((x-\frac{\pi}{6})^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots+\frac{1}{n!}\sin(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})^n$$

$$+o\left((x-\frac{\pi}{6})^n\right)。$$

（5） $f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{x-2}{2}}$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)-\frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{2n-\frac{1}{2}}n!}(x-2)^n$$

$$+\circ\left((x-2)^n\right)。$$

3. 通过对展开式及其余项的分析，说明用

$$\ln 2=\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}}\approx 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\bigg|_{x=\frac{1}{3}}$$

比用

$$\ln 2=\ln(1+x)\big|_{x=1}\approx\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\bigg|_{x=1}$$

效果好得多的两个原因。

**解** 利用第一个展开式计算时是用 $x=\frac{1}{3}$ 代入，利用第二个展开式计算时是用 $x=1$ 代入，显然第一个展开式的通项（或余项）趋于零的速度快，而第二个展开式的通项（或余项）趋于零的速度相对较慢，所以在指定精度的条件下，利用第一个展开式计算 $\ln 2$ 的值比利用第二个展开式计算量小，效果好。

另外可以通过比较两者的误差来说明两种方法的优劣：

由

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}},$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{x^k}{k}-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}},$$

可知利用第一个展开式计算前$n$项之和，余项为

$$r_{2n}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}[\frac{1}{(1+\xi_1)^{2n+1}}+\frac{1}{(1-\xi_2)^{2n+1}}]$$，其中$\xi_1,\xi_2$位于$0$与$x$之间。

取$x=\frac{1}{3}$，$\left|r_{2n}(\frac{1}{3})\right|\le\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}[1+\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^{2n+1}}]<\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$。

而利用第二个展开式计算前$n$项之和，余项为

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$，其中$\xi$位于$0$与$x$之间，

取$x=1$，$|r_n(1)|>\frac{1^{n+1}}{(n+1)(1+1)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$。

显然$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}>\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$，所以利用第一个展开式计算$\ln 2$的值比利用第二个展开式误差小，精度高。

4. 利用上题的讨论结果，不加计算，判别用哪个公式计算$\pi$的近似值效果更好，为什么？

(1) $\frac{\pi}{4}=\arctan 1\approx\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\bigg|_{x=1}$

(2) $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ （Machin 公式）

$$\approx 4\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\bigg|_{x=\frac{1}{5}}-\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\bigg|_{x=\frac{1}{239}}$$

解 两个计算$\pi$的公式都是利用了$\arctan x$的 Taylor 公式，但第一个公

式是用 $x=1$ 代入，而第二个公式是用 $x=\frac{1}{5}$ 与 $x=\frac{1}{239}$ 代入。由于 $\frac{1}{5}$ 与 $\frac{1}{239}$ 比 1 小得多，因此第二个公式的通项（或余项）比第一个公式的通项（或余项）趋于零的速度快得多，所以用第二个公式计算 $\pi$ 的近似值效果更好。

5. 利用 Taylor 公式求近似值（精确到 $10^{-4}$）：

(1) $\lg 11$；　(2) $\sqrt[3]{e}$；　(3) $\sin 31^{\circ}$；

(4) $\cos 89^{\circ}$；　(5) $\sqrt[5]{250}$；　(6) $(1.1)^{1.2}$.

解（1） $\lg(10+x)=\frac{\ln(10+x)}{\ln 10}=1+\frac{1}{\ln 10}\ln(1+\frac{x}{10})=1+\frac{1}{\ln 10}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k10^k}+r_n(x)$，

其中 $r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$，$\xi$ 位于 0 与 $\frac{x}{10}$ 之间。

由 $|r_n(1)|=\frac{1}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}<\frac{1}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)}$，得到 $|r_4(1)|<0.89\times 10^{-6}$，满足精度要求，所以

$$\lg 11\approx 1+\frac{1}{\ln 10}(\frac{1}{10}-\frac{1}{2\cdot 10^2}+\frac{1}{3\cdot 10^3}-\frac{1}{4\cdot 10^4})\approx 1.04139\text{。}$$

（2） $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+r_n(x)$，其中 $r_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 位于 0 与 $x$ 之间。

令 $x=\frac{1}{3}$，$n=4$，$|r_4(\frac{1}{3})|\le\frac{e^{\frac{1}{3}}}{5!3^5}\approx 0.27\times 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{6\cdot 27}+\frac{1}{24\cdot 81}\approx 1.39561\text{。}$$

（3） $\sin(\frac{\pi}{6}+x)=\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{6})x-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6})x^2+r_2(x)$，

其中 $r_2(x)=-\frac{x^3}{3!}\cos(\frac{\pi}{6}+\xi)$，$\xi$ 位于 0 与 $x$ 之间。

由于$|r_2(\frac{\pi}{180})|\le\frac{\pi^3}{3!180^3}\approx 0.88\times10^{-6}$，满足精度要求，所以

$$\sin 31^\circ=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180})=\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{6})\frac{\pi}{180}-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{180})^2\approx 0.51504\text{。}$$

（4） $\sin x=x+r_2(x)$，其中$r_2(x)=-\frac{x^3}{3!}\cos\xi$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_2(\frac{\pi}{180})|\le 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$\cos 89^\circ=\sin 1^\circ=\sin(\frac{\pi}{180})\approx\frac{\pi}{180}\approx 0.01745\text{。}$$

（5） $f(x)=3(1+x)^{\frac{1}{5}}=3(1+\frac{1}{5}x-\frac{4}{25\cdot 2}x^2)+r_2(x)$，

其中$r_2(x)=\frac{18}{125(1+\xi)^{\frac{14}{5}}}x^3$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_2(\frac{7}{243})|<\frac{18}{125}(\frac{7}{243})^3\approx 0.34\times10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$f(\frac{7}{243})=3(1+\frac{7}{243})^{\frac{1}{5}}=250^{\frac{1}{5}}\approx 3(1+\frac{7}{5\cdot 243}-\frac{4\cdot 7^2}{25\cdot 2\cdot 243^2})\approx 3.01708\text{。}$$

（6） $f(x)=(1+x)^{1.2}=1+1.2x+\frac{1.2\cdot 0.2}{2}x^2-\frac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8}{6}x^3+r_3(x)$，

其中$r_3(x)=\frac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8\cdot 1.8}{24(1+\xi)^{2.8}}x^4$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_3(0.1)|\le 0.0144(0.1)^4=0.144\times10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$f(0.1)=(1.1)^{1.2}=1+1.2\cdot 0.1+\frac{1.2\cdot 0.2}{2}0.1^2-\frac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8}{6}0.1^3\approx 1.12117\text{。}$$

6. 利用函数的 Taylor 公式求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}\ (a>0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$；

(5) $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$；　　　(6) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$；

(7) $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$；　　　(8) $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

解（1） $e^x\sin x-x(1+x)=(1+x+\frac{x^2}{2})(x-\frac{x^3}{6})+o(x^3)-(x+x^2)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}。$$

（2） $a^x+a^{-x}-2=(e^{x\ln a}-1)+(e^{-x\ln a}-1)$

$=(\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2))+(-\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2))=\ln^2 a\cdot x^2+o(x^2)$，

所以

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\ln^2 a。$$

（3）由于 $\sin x=x+o(x^2)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0。$$

（4）令 $u=\frac{1}{x}$，由于

$(1+u)^{\frac{1}{5}}-(1-u)^{\frac{1}{5}}=(1+\frac{1}{5}u-\frac{2}{25}u^2+o(u^2))-(1-\frac{1}{5}u-\frac{2}{25}u^2+o(u^2))=\frac{2}{5}u+o(u^2)$，

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})=\lim_{u\to 0+}\frac{(1+u)^{\frac{1}{5}}-(1-u)^{\frac{1}{5}}}{u}=\frac{2}{5}。$$

（5）令 $u=\frac{1}{x}$，由于 $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{u\to 0}\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{2}u^2+o(u^2)}{u^2}=\frac{1}{2}。$$

（6）由于 $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}。$$

（7）令 $u=\frac{1}{x}$，由于

$$\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2=(\sqrt{1+u}-1)+(\sqrt{1-u}-1)$$

$$=(\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2))+(-\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2))=-\frac{u^2}{4}+o(u^2)，$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})=\lim_{u\to 0+}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2}{u^2}=-\frac{1}{4}。$$

（8）令 $u=\frac{1}{x}$，由于

$$e^u(1-u+\frac{u^2}{2})-\sqrt{1-u^6}=(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6})(1-u+\frac{u^2}{2})-1+o(u^3)=\frac{u^3}{6}+o(u^3)，$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]=\lim_{u\to 0+}\frac{e^u(1-u+\frac{u^2}{2})-\sqrt{1-u^6}}{u^3}=\frac{1}{6}。$$

7． 利用 Taylor 公式证明不等式：

（1） $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$， $x>0$；

（2） $(1+x)^\alpha<1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$， $1<\alpha<2, x>0$。

证（1）利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}>x-\frac{x^2}{2},\quad 0<\xi<x，$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\quad 0<\xi<x。$$

（2） $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6(1+\xi)^{3-\alpha}}x^3$， $0<\xi<x$。

由于 $1<\alpha<2$ ，所以 $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)<0$，从而 Lagrange 余项 $\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6(1+\xi)^{3-\alpha}}x^3$ 小于零，于是得到

$$(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2。$$

8．判断下列函数所表示的曲线是否存在渐近线，若存在的话求出渐近线方程：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$；　(2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$；

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$；　(4) $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；

(5) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；　(6) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；

(7) $y=x+\operatorname{arc}\cot x$；　(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$；

(9) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　(10) $y=x^5\left(\cos\dfrac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$；

(11) $y=x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$；　(12) $y=x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

解　（1）由于 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{1+x}=\infty$，所以 $x=-1$ 是垂直渐近线；由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-1,$$

所以斜渐近线为 $y=x-1$。

（2）由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}=0$，所以 $y=0$ 是水平渐近线。

（3）解法一：由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{6x^2-8x+3}}{x}=\sqrt{6}\text{，}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{6x^2-8x+3}-\sqrt{6}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x+3}{\sqrt{6x^2-8x+3}+\sqrt{6}x}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{，}$$

所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ；

由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{6x^2-8x+3}}{x}=-\sqrt{6}\text{，}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-8x+3}+\sqrt{6}x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x+3}{\sqrt{6x^2-8x+3}-\sqrt{6}x}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{，}$$

所以当 $x\to-\infty$ 时，渐近线为 $y=-\sqrt{6}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}$。

解法二：

$$\sqrt{6x^2-8x+3}-ax-b=\frac{6x^2-8x+3-(ax+b)^2}{\sqrt{6x^2-8x+3}+ax+b}=\frac{(6-a^2)x^2-(8+2ab)x+3-b^2}{\sqrt{6x^2-8x+3}+ax+b}\text{，}$$

由 $\lim_{x\to\infty}(y-ax-b)=0$ ，解得 $a=\pm\sqrt{6}, b=-\frac{4}{a}$。所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\frac{2\sqrt{6}}{3}$，当 $x\to-\infty$ 时，渐近线为 $y=-\sqrt{6}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}$。

（4）由于 $\lim_{x\to0+}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ ，所以 $x=0$ 是垂直渐近线；令 $u=\frac{1}{x}$，由

$$\lim_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-ax-b]=\lim_{u\to0}\frac{(2u+1)\,\mathrm{e}^u-a-bu}{u}=\lim_{u\to0}\frac{(1-a)+(3-b)u+o(u)}{u}=0\text{，}$$

解得 $a=1,b=3$，所以斜渐近线为 $y=x+3$。

（5）由于 $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2x}=\infty$，所以曲线无渐近线。

（6）函数定义域为 $(-1,1)$，且 $\lim_{x\to1-}\ln\frac{1+x}{1-x}=+\infty$，$\lim_{x\to-1+}\ln\frac{1+x}{1-x}=-\infty$，所以 $x=\pm1$ 为两条垂直渐近线。

（7）由于

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0，$$

所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=x$ ；

由于

$$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi，$$

所以当 $x\to-\infty$ 时，渐近线为 $y=x+\pi$。

（8）令 $u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}-ax-b]=\lim_{u\to0}\frac{(1-2u)^{\frac{1}{3}}(1+u)^{\frac{2}{3}}-a-bu}{u}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{(1-\frac{2}{3}u)(1+\frac{2}{3}u)-a-bu+o(u)}{u}=\lim_{u\to0}\frac{1-a-bu+o(u)}{u}=0，$$

解出 $a=1,b=0$，所以曲线有渐近线 $y=x$。

（9）由于

$$\lim_{x\to\infty}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\arccos(-1)=\pi，$$

所以曲线有水平渐近线 $y=\pi$。

（10）令 $u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^5\left(\cos\frac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)-ax-b\right]=\lim_{u\to0}\frac{\cos u-e^{-\frac{u^2}{2}}-au^4-bu^5}{u^5}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24})-(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{2\cdot4})-au^4-bu^5+o(u^5)}{u^5}=0，$$

解出 $a=-\dfrac{1}{12},b=0$，所以曲线有渐近线 $y=-\dfrac{1}{12}x$。

（11）由于

$$\lim_{x\to0+}x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)=+\infty，$$

所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线。

令 $u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)-ax-b\right]=\lim_{u\to0}\frac{e^{\frac{u}{3}}-(1+u)^{\frac{1}{3}}-au^2-bu^3}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{(1+\frac{u}{3}+\frac{u^2}{2\cdot9}+\frac{u^3}{6\cdot27})-(1+\frac{u}{3}-\frac{2u^2}{2\cdot9}+\frac{10u^3}{6\cdot27})-au^2-bu^3+o(u^3)}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{(\frac{1}{6}-a)u^2+(-\frac{1}{18}-b)u^3+o(u^3)}{u^3}=0\text{，}$$

解出 $a=\dfrac{1}{6},b=-\dfrac{1}{18}$，所以斜渐近线为 $y=\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{18}$。

（12）由于

$$\lim_{x\to0+}x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)=+\infty\text{，}$$

所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线。

令 $u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)-ax-b\right]==\lim_{u\to0+}\frac{e^{\frac{u}{2}}-\sqrt{1+u}-au^2-bu^3}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0+}\frac{(1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2\cdot4}+\frac{u^3}{6\cdot8})-(1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{2\cdot4}+\frac{3u^3}{6\cdot8})-au^2-bu^3+o(u^3)}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0+}\frac{(\frac{1}{4}-a)u^2-(\frac{1}{24}+b)u^3+o(u^3)}{u^3}=0\text{，}$$

解出 $a=\dfrac{1}{4},b=-\dfrac{1}{24}$，所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{24}$。

由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{2x}}+\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}\right)=\infty\text{，}$$

所以当 $x\to-\infty$ 时，没有渐近线。

9．(1)　设 $0<x_1<\dfrac{\pi}{2}$，$x_{n+1}=\sin x_n$　（$n=1,2,\cdots$），证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$；　　　　　　　(ii) $x_n^2 \sim \dfrac{3}{n} \quad (n\to\infty)$。

⑵　设 $y_1 > 0$， $y_{n+1} = \ln(1+y_n)$ （$n = 1, 2, \cdots$），证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$；　　　　　　　(ii) $y_n \sim \dfrac{2}{n} \quad (n\to\infty)$。

证（1）易知数列$\{x_n\}$单调减少且有下界。设其极限为$a$，对$x_{n+1} = \sin x_n$两端取极限，有$a = \sin a \quad (0 \le a < \dfrac{\pi}{2})$，所以$a = 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_{n-1}}{x_{n-1}^2 - \sin^2 x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4}{x_{n-1}^2 - [x_{n-1}^2 - \frac{1}{3}x_{n-1}^4 + o(x_{n-1}^4)]} = 3,$$

所以

$$x_n^2 \sim \frac{3}{n} \quad (n\to\infty)。$$

（2）易知数列$\{y_n\}$单调减少且有下界。设其极限为$b$，对$y_{n+1} = \ln(1+y_n)$两端取极限，有$b = \ln(1+b) \quad (0 \le b < y_1)$，所以$b = 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$。

利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{y_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}\ln(1+y_{n-1})}{y_{n-1} - \ln(1+y_{n-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}^2}{y_{n-1} - [y_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-1}^2 + o(y_{n-1}^2)]} = 2,$$

所以

$$y_n \sim \frac{2}{n} \quad (n\to\infty)。$$

10．设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且满足$|f''(x)| \le 1$， $f(x)$ 在区间$(0,1)$内取到最大值$\dfrac{1}{4}$。证明：$|f(0)| + |f(1)| \le 1$。

证　设$x_0 \in (0,1)$为函数的最大值点，则$f(x_0) = \dfrac{1}{4}$，$f'(x_0) = 0$。以$x = 0, x = 1$代入$f(x)$在点$x_0$的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2, \quad \xi \in (0, x_0),$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2, \quad \eta \in (x_0, 1),$$

得到

$$|f(0)| + |f(1)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[x_0^2 + (1-x_0)^2] \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1。$$

11．设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且在$[0,1]$上成立

$$|f(x)|\le 1，\quad |f''(x)|\le 2。$$

证明在$[0,1]$上成立$|f'(x)|\le 3$。

**证** 利用例 5.4.13，由于 $A=1, B=2$，所以在$[0,1]$上成立

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{1}{2}B=3。$$

12．设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$， $\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=-1$。

证明：

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8。$$

**证** 设$x_0\in(0,1)$为函数的最小值点，则 $f(x_0)=-1$，$f'(x_0)=0$。以 $x=0, x=1$ 代入 $f(x)$ 在点$x_0$的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^{\ 2}=0,\quad \xi\in(0,x_0)，$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=0,\ \eta\in(x_0,1)\ ，$$

得到

$$\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^{\ 2}=\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=1。$$

当 $x_0\le\frac{1}{2}$时， $f''(\xi)=\frac{2}{x_0^{\ 2}}\ge 8$；当 $x_0>\frac{1}{2}$时， $f''(\eta)=\frac{2}{(1-x_0)^2}>8$。所以

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8。$$

13．设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导， $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$

**证** 设$|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，若 $x_0=a$ 或 $b$，则结论自然成立。设 $a<x_0<b$，以 $x=a$ 和 $x=b$ 代入 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2\quad \xi\in(a,x_0)，$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(b-x_0)^2\quad \eta\in(x_0,b)，$$

将 $f(a)=f(b)=0$， $f'(x_0)=0$ 代入上面两式，得到

$$|f(x_0)|\le\frac{1}{2}(a-x_0)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|,\quad |f(x_0)|\le\frac{1}{2}(b-x_0)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$

当 $x_0\in(a,\frac{a+b}{2})$ 时， $(a-x_0)^2<\frac{1}{4}(b-a)^2$ ；

当 $x_0\in[\frac{a+b}{2},b)$ 时， $(b-x_0)^2\le\frac{1}{4}(b-a)^2$。

综合上述两种情况，得到

$$\left|f(x_0)\right|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$

# 习 题 5.5 应用举例

1. 求下列函数的极值点，并确定它们的单调区间：

(1) $y=2x^3-3x^2-12x+1$;

(2) $y=x+\sin x$;

(3) $y=\sqrt{x}\ln x$;

(4) $y=x^n\mathrm{e}^{-x}$ （$n\in\mathrm{N}^+$）；

(5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-2}}$;

(6) $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$;

(7) $y=3x+\dfrac{4}{x}$;

(8) $y=x-\ln(1+x)$;

(9) $y=\cos^3x+\sin^3x$;

(10) $y=\arctan x-x$;

(11) $y=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$;

(12) $y=2-\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

(13) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(14) $y=x^{\frac{1}{x}}$.

解（1）因为 $y'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$ 有两个零点 $-1,2$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,-1]$ 和 $[2,+\infty)$ 单调增加，在 $[-1,2]$ 单调减少，所以 $x=-1$ 是极大值点， $x=2$ 是极小值点。

（2）因为 $y'(x)=1+\cos x\ge 0$，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 严格单调增加，无极值点。

（3） $y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)$ 有零点 $e^{-2}$，根据一阶导数的符号可知函数在 $(0,e^{-2}]$ 单调减少，在 $[e^{-2},+\infty)$ 单调增加，所以 $x=e^{-2}$ 是极小值点。

（4） $y'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$ 有零点 $0$ 和 $n$，

当 $n$ 是偶数时，函数在 $(-\infty,0]$ 和 $[n,+\infty)$ 单调减少，在 $[0,n]$ 单调增加，所以 $x=0$ 是极小值点， $x=n$ 是极大值点；

当 $n$ 是奇数时，函数在 $(-\infty,n]$ 单调增加，在 $[n,+\infty)$ 单调减少，所以 $x=n$ 是极大值点。

（5） $y$ 和 $y^3$ 具有相同的单调性，$\dfrac{d(y^3)}{dx}=\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$ 有零点 $x=-1,5$，$x=-1$ 是不可导点。根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,-1]$ 和 $[5,+\infty)$ 单调增加，在 $[-1,2)$ 和 $(2,5]$ 单调减少，所以 $x=-1$ 是极大值点，$x=5$ 是极小值点。

（6） $y'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$ 有零点 $x=1\pm\sqrt{2}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,1-\sqrt{2}]$ 和 $[1+\sqrt{2},+\infty)$ 单调增加，在 $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$ 单调减少，所以 $x=1-\sqrt{2}$ 是极大值点，$x=1+\sqrt{2}$ 是极小值点。

（7） $y'(x)=3-\dfrac{4}{x^2}$ 有零点 $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,-\dfrac{2}{\sqrt{3}}]$ 和 $[\dfrac{2}{\sqrt{3}},+\infty)$ 单调增加，在 $[-\dfrac{2}{\sqrt{3}},0)$ 和 $(0,\dfrac{2}{\sqrt{3}}]$ 单调减少，所以 $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 是极大值点，$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 是极小值点。

（8） $y'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$ 有零点 $x=0$，函数在 $x=-1$ 不可导，根据一阶导数的符号，可知函数在 $[0,+\infty)$ 单调增加，在 $(-1,0]$ 单调减少，所以 $x=0$ 是极小值点。

（9） $y'(x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$ 有零点 $x=\dfrac{k\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $[2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$，$[2k\pi+\pi,2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}]$ 和 $[2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi]$ 单调增加，在 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{4}]$，$[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi]$ 和 $[2k\pi+\dfrac{5\pi}{4},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}]$ 单调减少，所以 $x=2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathrm{Z}$ 是极大值点，$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\pi,(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathrm{Z}$ 是极小值点。

（10） $y'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1=-\dfrac{x^2}{1+x^2}\le 0$，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 严格单调减少，所以

没有极值点。

（11） $y'(x)=2e^{x}-e^{-x}=(2e^{2x}-1)e^{-x}$ 有零点 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $[-\frac{1}{2}\ln 2,+\infty)$ 单调增加，在 $(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2]$ 单调减少，所以 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$ 是极小值点。

（12） $y'(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$， $x=1$ 是不可导点，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,1]$ 单调增加，在 $[1,+\infty)$ 单调减少，所以 $x=1$ 是极大值点。

（13） $y'(x)=\frac{12-5x}{(4+5x^{2})^{\frac{3}{2}}}$ 有零点 $x=\frac{12}{5}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,\frac{12}{5}]$ 单调增加，在 $[\frac{12}{5},+\infty)$ 单调减少，所以 $x=\frac{12}{5}$ 是极大值点。

（14） $y'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^{2}}$ 有零点 $x=e$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(0,e]$ 单调增加，在 $[e,+\infty)$ 单调减少，所以 $x=e$ 是极大值点。

2. 求下列曲线的拐点，并确定函数的保凸区间：

(1) $y=-x^{3}+3x^{2}$；　　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $y=\sqrt{1+x^{2}}$；　　(4) $y=x\,\mathrm{e}^{-x}$；

(5) $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^{2}}{x-2}}$；　　(6) $y=\frac{1-x}{1+x^{2}}$；

(7) $y=x-\ln(1+x)$；　　(8) $y=\arctan x-x$；

(9) $y=(x+1)^{4}+\mathrm{e}^{x}$；　　(10) $y=\ln(1+x^{2})$；

(11) $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$；　　(12) $y=x+\sqrt{x-1}$.

解 （1） $y'(x)=-3x^{2}+6x, y''(x)=-6x+6$，二阶导数有零点 $x=1$，根据二阶导数的符号，可知点 $(1,2)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,1]$ 下凸，$[1,+\infty)$ 上凸。

（2） $y'(x)=1+\cos x, y''(x)=-\sin x$，二阶导数有零点 $x=k\pi, k\in Z$，根据二阶导数的符号，可知点 $(k\pi,k\pi),\ k\in Z$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上凸，$[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 下凸。

（3） $y'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^3}=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}>0$，所以曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸。

（4） $y'(x)=(1-x)e^{-x}, y''(x)=(x-2)e^{-x}$，二阶导数有零点 $x=2$，根据二阶导数的符号，可知点 $(2,\dfrac{2}{e^2})$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,2]$ 上凸，$[2,+\infty)$ 下凸。

（5） $y'(x)=\dfrac{(x-5)}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$，$y''(x)=\dfrac{-2(x^2-10x-2)}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{7}{3}}}$，二阶导数有零点 $x=5\pm3\sqrt{3}$，根据二阶导数的符号，可知点 $\left(5\pm3\sqrt{3},\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}(1\pm\sqrt{3})\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,5-3\sqrt{3}]$ 和 $(2,5+3\sqrt{3}]$ 下凸，$[5-3\sqrt{3},2)$ 和 $[5+3\sqrt{3},+\infty)$ 上凸。

（6） $y'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}, y''(x)=\dfrac{-2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$，二阶导数有零点 $x=-1, 2\pm\sqrt{3}$，根据二阶导数的符号，可知点 $(-1,1),\ \left(2\pm\sqrt{3},\dfrac{1}{4}(1\mp\sqrt{3})\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,-1]$ 和 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 下凸，$[2+\sqrt{3},+\infty)$ 和 $[-1,2-\sqrt{3}]$ 上凸。

（7） $y'(x)=1-\frac{1}{1+x}, y''(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-1,+\infty)$ 下凸。

（8） $y'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1, y''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=0$，根据二阶导数的符号，可知点 $(0,0)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,0]$ 下凸，$[0,+\infty)$ 上凸。

（9） $y''(x)=12(x+1)^2+e^x>0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸。

（10） $y'(x)=\frac{2x}{1+x^2}, y''(x)=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=\pm 1$，根据二阶导数的符号，可知点 $(\pm 1,\ln 2)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上凸，$[-1,1]$ 下凸。

（11） $y'(x)=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}, y''(x)=e^{\arctan x}\frac{1-2x}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=\frac{1}{2}$，根据二阶导数的符号，可知点 $\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,\frac{1}{2}]$ 下凸，$[\frac{1}{2},+\infty)$ 上凸。

（12） $y'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}, y''(x)=-\frac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}<0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$[1,+\infty)$ 上凸。

3. 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处二阶可导，证明：$f(x)$ 在 $x_0$ 处取到极大值（极小值）的必要条件是 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)\le 0$（$f''(x_0)\ge 0$）。

**证** 先设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取到极大值，则由于 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，所以 $f'(x_0)=0$。若 $f''(x_0)>0$，则由

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$
$$=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)，$$

可知当 $x\neq x_0$ 充分接近 $x_0$ 时，有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0$，与 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取到极大值矛盾，所以 $f''(x_0)\le 0$。

$f(x)$ 在 $x_0$ 处取到极小值的情况可同样证明。

4. 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续且 $\varphi(a)\neq 0$，讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况。

解 首先有 $f(a)=0$。

当 n 为偶数时 $(x-a)^n\ge 0$，当 $\varphi(a)>0$ 时，$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近非负，所以 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点；而当 $\varphi(a)<0$ 时，函数 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近非正，所以 $x=a$ 为函数的极大值点。

当 n 为奇数时 $(x-a)^n$ 在 $x=a$ 附近变号，$\varphi(a)\neq 0$，$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近也变号，所以 $x=a$ 非极值点。

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 $n$ 阶连续导数，且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况。

解 $f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$，$\xi$ 位于 0 与 $x$ 之间。由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 $n$ 阶连续导数，$f^{(n)}(a)\neq 0$，所以当 $x$ 位于 $x=a$ 附近，$f^{(n)}(\xi)$ 不变号，利用上题的结果可知：

当 n 为偶数时，若 $f^{(n)}(a)>0$，则 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点；若 $f^{(n)}(a)<0$，则 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点。

当 n 为奇数时，$x=a$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点。

6．如何选择参数$h>0$，使得

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

在$x=\pm\sigma$（$\sigma>0$为给定的常数）处有拐点？

解 $y'(x)=\frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}, y''(x)=\frac{-2h^3(1-2h^2x^2)}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$，可知曲线在$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}h}$处有拐点，所以取$h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$即可。

7．求$y=\frac{x^2}{x^2+1}$在拐点处的切线方程。

解 $y'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}, y''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$，可知$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$是曲线的拐点，由于$y'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$，得到在拐点处曲线的切线方程为

$$y-\frac{1}{4}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}(x\mp\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

即：$3\sqrt{3}x-8y-1=0$和$3\sqrt{3}x+8y-5=0$。

8．作出下列函数的图象（渐近线方程可利用上一节习题 8 的结果）：

（1）$y=\frac{x^2}{1+x}$；　　（2）$y=\frac{2x}{1+x^2}$；

（3）$y=\sqrt{6x^2-8x+3}$；　　（4）$y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$；

（5）$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　（6）$y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；

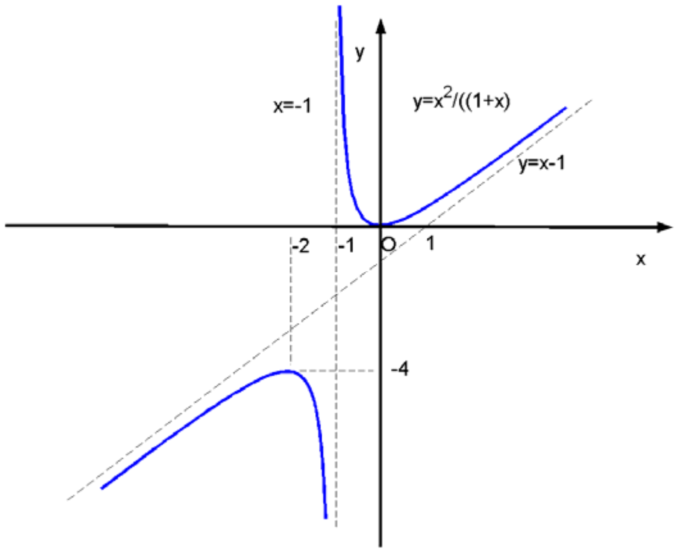
（7）$y=x+\operatorname{arccot}x$；　　（8）$y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$；

（9）$y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 （1）$y=\frac{x^2}{1+x}$，$y'=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$，$y''=\frac{2}{(1+x)^3}$。

| $x$ | $(-\infty,-2)$ | $-2$ | $(-2,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | — | 无定义 | — | 0 | + |
| $y''$ | — | — | — | 无定义 | + | + | + |
| $y$ | ↗ | 极大值 -4 | ↘ | 无定义 | ↘ | 极小值 0 | ↗ |

渐近线为 $y=x-1$ 和 $x=-1$。

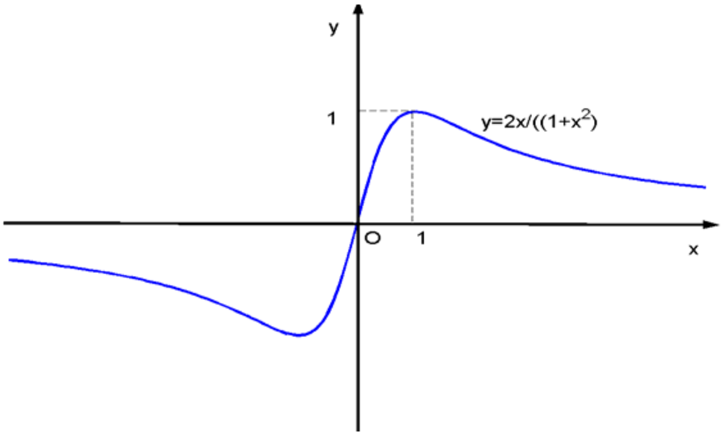



(2) 因为 y 为奇函数,只要考虑 $x\geq 0$ 的情况。

$$y=\frac{2x}{1+x^2},\quad y'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\quad y''=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}。$$

| $x$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,\sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | + | 0 | — | — | — |
| $y''$ | — | — | $-1$ | — | 0 | + |
| $y$ | 0 | ↗ | 极大值 1 | ↘ | 拐点 $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ | ↘ |

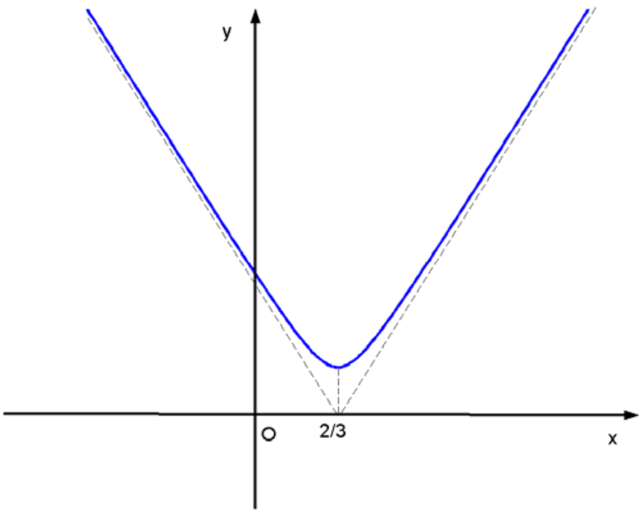
渐近线是 $y=0$。




(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$， $y'=\dfrac{6x-4}{\sqrt{6x^2-8x+3}}$， $y''=\dfrac{2}{\sqrt{(6x^2-8x+3)^3}}$。

| $x$ | $(-\infty,\frac{2}{3})$ | $\frac{2}{3}$ | $(\frac{2}{3},+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | — | 0 | + |
| $y''$ | + | + | + |
| $y$ | ↘ | 极小值 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ↗ |

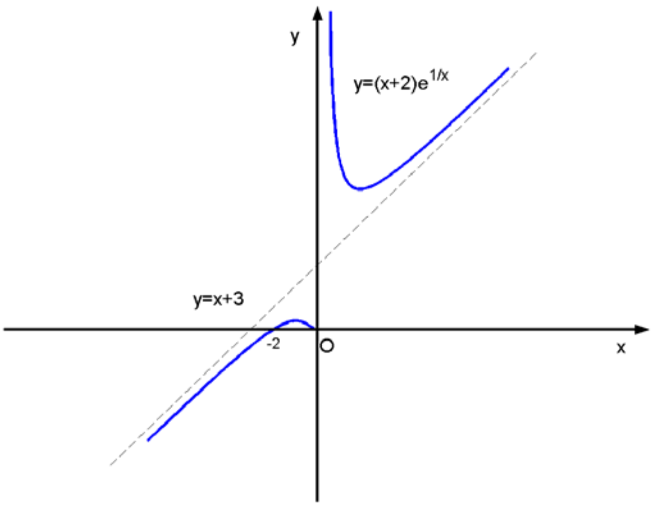
渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 和 $y=-\sqrt{6}x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。



(4) $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， $y'=\frac{x^2-x-2}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， $y''=\frac{5x+2}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,-\frac{2}{5})$ | $-\frac{2}{5}$ | $(-\frac{2}{5},0)$ | 0 | $(0,2)$ | 2 | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | − | − | − | 无定义 | − | 0 | + |
| $y''$ | − | − | − | 0 | + | 无定义 | + | + | + |
| $y$ | ↗ | 极大值 $e^{-1}$ | ↘ | 拐点 $(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$ | ↘ | 无定义 | ↘ | 极小值 $4e^{\frac{1}{4}}$ | ↗ |

渐近线为 $y=x+3$ 和 $x=0$。

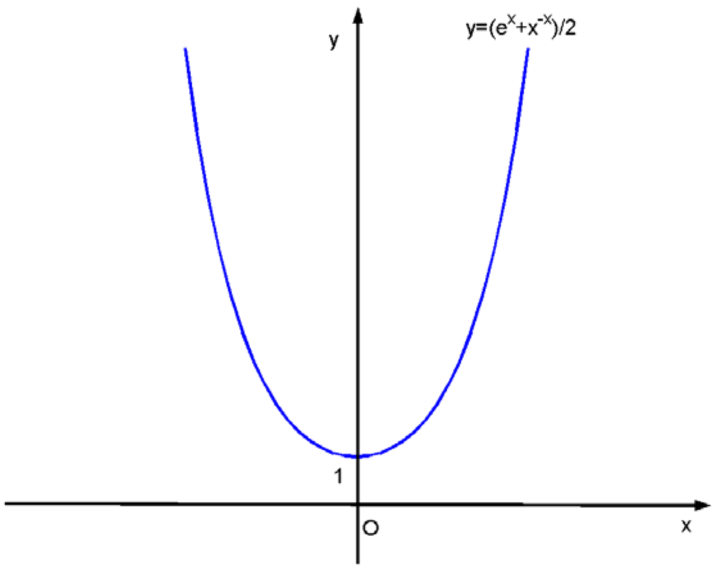



（5）由于 y 为偶函数，只要考虑 x>0 情况。

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}，\quad y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}，\quad y''=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | － | 1 | + |
| $y''$ | + | + | + |
| $y$ | ↘ | 极小值 1 | ↗ |

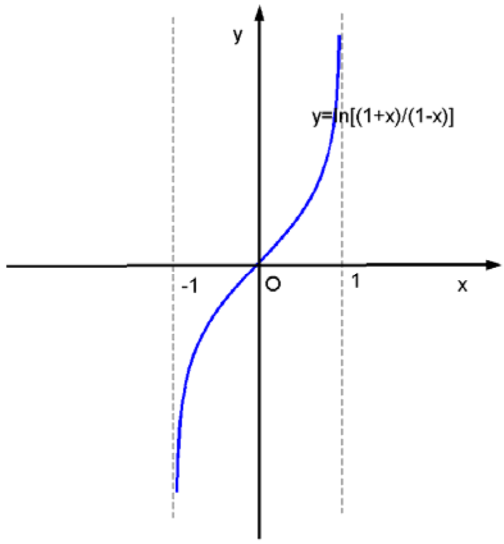
无渐近线。




（6） $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$， $y'=\frac{2}{1-x^2}$， $y''=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$。

| $x$ | $(-1,0)$ | 0 | $(0,1)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | ＋ | 2 | + |
| $y''$ | － | 0 | + |
| $y$ | ↗ | 拐点（0,0） | ↗ |

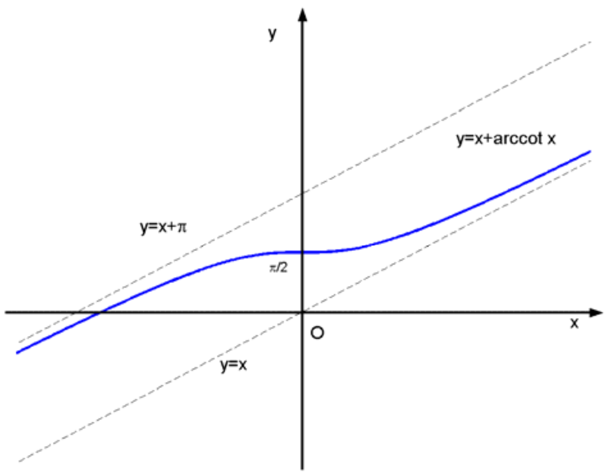
$x=\pm1$ 为两条垂直渐近线。




（7） $y = x + \operatorname{arccot} x$， $y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}$， $y'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$。

| $x$ | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | + |
| $y''$ | − | + | + |
| $y$ | ↗ | 拐点 $(0, \frac{\pi}{2})$ | ↗ |

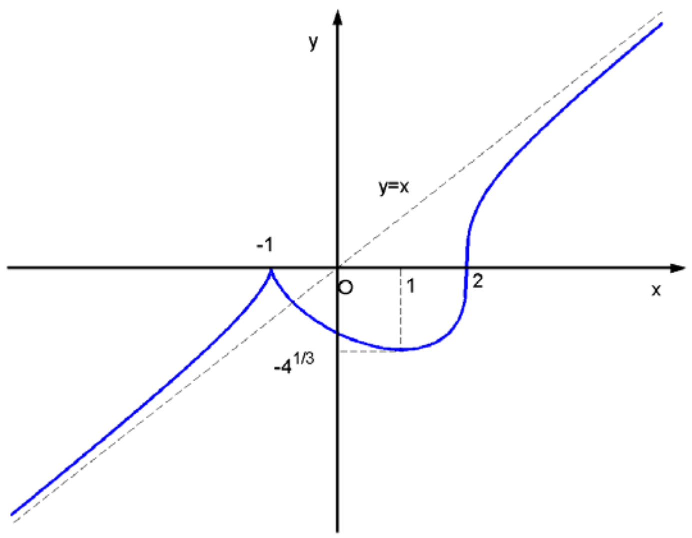
渐近线为 $y = x$ 和 $y = x + \pi$。



(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$，$y'=\dfrac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}$，$y''=\dfrac{-2}{(x-2)^{\frac{5}{3}}(x+1)^{\frac{4}{3}}}$。

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 无定义 | $-$ | $0$ | $+$ | 无定义 | $+$ |
| $y''$ | $+$ | 无定义 | $+$ | 无定义 | $+$ | 无定义 | $-$ |
| $y$ | ↗ | 极大值 0 | ↘ | 极小值 $-\sqrt[3]{4}$ | ↗ | 拐点 (2,0) | ↗ |

渐近线为 $y=x$。

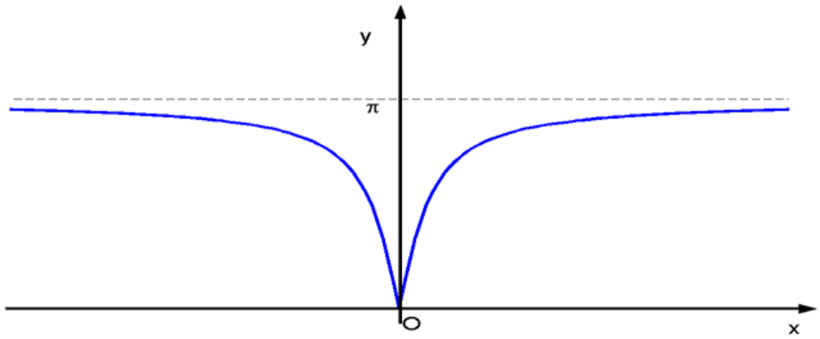



(9) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 是偶函数。$y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{2\operatorname{sgn}(x)}{1+x^2}，\quad y''=-\frac{4x\operatorname{sgn}(x)}{(1+x^2)^2}。$$

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | － | 无定义 | + |
| $y''$ | － | 无定义 | － |
| $y$ | ↘ | 极小值 0 | ↗ |

渐近线为 $y=\pi$。




9．求下列数列的最大项：

(1) $\left\{\dfrac{n^{10}}{2^n}\right\}$；　　　　(2) $\{\sqrt[n]{n}\}$.

解（1）令 $f(x)=\dfrac{x^{10}}{2^x}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^9}{2^x}(10-\ln 2\cdot x)$，$f(x)$ 的极大值点为 $\dfrac{10}{\ln 2}\approx 14.4$，且 $f(14)-f(15)\approx 56730>0$，所以最大项对应 $n=14$；

（2）令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，则 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$，极大值点为 $x=e$，而 $f(2)-f(3)<0$，所以最大项对应 $n=3$。

10．设 $a,b$ 为实数，证明

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

**证** 对于函数 $y=\frac{x}{1+x}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，函数 y 单调增加，所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

11．设 $a>\ln 2-1$ 为常数，证明当 $x>0$ 时，

$$x^2-2ax+1<e^x。$$

**证** 令 $f(x)=e^x-(x^2-2ax+1)$，则

$$f'(x)=e^x-2x+2a，\quad f''(x)=e^x-2。$$

由于在 $(0,\ln 2)$ 上 $f''(x)<0$，$f'(x)$ 在 $[0,\ln 2]$ 严格单调减少；在 $(\ln 2,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$，$f'(x)$ 在 $[\ln 2,+\infty)$ 严格单调增加。所以 $x=\ln 2$ 为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值点。由于 $f'(\ln 2)=2-2\ln 2+2a>0$，所以 $f'(x)>0,\ \forall x>0$。再由 $f(0)=0$，得到 $f(x)>0,\ \forall x>0$，证毕。

12．设 $k>0$，试问当 $k$ 为何值时，方程 $\arctan x-kx=0$ 有正实根？

**解** 令 $f(x)=\arctan x-kx$，则

$$f(0)=0,\ f(+\infty)=-\infty,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-k。$$

当 $k\ge 1$ 时，$f'(x)<0\ (x\ne 0)$，所以 $f(x)$ 严格单调减少，由 $f(0)=0$ 可知方程无正实根；当 $0<k<1$ 时，$f'(0)>0$，所以当 $x>0$ 很小时 $f(x)>0$，由连续函数的零点存在定理，可知方程必有正实根。

13．对 $a$ 作了 $n$ 次测量后获得了 $n$ 个近似值 $\{a_k\}_{k=1}^n$，现在要取使得

$$s=\sum_{k=1}^n(a_k-\xi)^2$$

达到最小的 $\xi$ 作为 $a$ 的近似值，$\xi$ 应如何取？

**解** 由

$$\frac{ds}{d\xi}=\sum_{k=1}^{n}-2(a_k-\xi)=-2(\sum_{k=1}^{n}a_k-n\xi)=0\text{，}$$

可得$\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$，这就是使$s$达到最小的$a$的近似值。

14．证明：对于给定了体积的圆柱形，当它的高与底面的直径相等的时候表面积最小。

**证** 设圆柱体的底面半径为$r$，高为$h$，则圆柱体的体积$V=\pi r^2 h$。其表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi(r^2+\frac{V}{\pi r})\text{，}$$

$$\frac{dS}{dr}=2\pi(2r-\frac{V}{\pi r^2})=0\text{。}$$

求解上述方程，得到

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\quad h=\frac{V}{\pi r^2}=2r,$$

此时圆柱体的表面积最小，证毕。

15． 在底为$a$高为$h$的三角形中作内接矩形，矩形的一条边与三角形的底边重合，求此矩形的最大面积？

**解** 设矩形的底边（与三角形底边重合者）长为$x$，高为$y$，由

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},$$

可知矩形面积为

$$S=xy=\frac{a}{h}(h-y)y,$$

$$\frac{dS}{dy}=\frac{a}{h}(h-2y)=0\text{，}$$

解得

$$y=\frac{h}{2},x=\frac{a}{2}\text{，}$$

所以当 $y=\frac{h}{2}, x=\frac{a}{2}$ 时，矩形面积最大，最大面积为 $S=\frac{ah}{4}$。

16．求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，边与椭圆的轴平行的面积最大的矩形。

**解** 设矩形的长与宽分别为 $2x$ 与 $2y$，则 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，矩形的面积为

$$S=4xy=\frac{4bx\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

$$\frac{dS}{dx}=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=0,$$

解得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{2}}$，所以当矩形的边长分别为 $\sqrt{2}a$ 与 $\sqrt{2}b$ 时，内接矩形的面积最大。

17．将一块半径为 $r$ 的圆铁片剪去一个圆心角为 $\theta$ 的扇形后做成一个漏斗，问 $\theta$ 为何值时漏斗的容积最大？

**解** 可以求得漏斗的底面半径为 $\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}$，高度为

$$\sqrt{r^2-\left[\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}\right]^2}=\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\theta-\theta^2},$$

所以漏斗的容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}\right]^2\cdot\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}=\frac{r^3}{24\pi^2}(2\pi-\theta)^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2},$$

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{r^3(2\pi-\theta)}{24\pi^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}(3\theta^2-12\pi\theta+4\pi^2)=0,$$

上式关于 $\theta$ 在 $(0,2\pi)$ 中有唯一解

$$\theta=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

这就是使漏斗容积最大的角度 $\theta$。

18. 要做一个容积为 $V$ 的有盖的圆柱形容器，上下两个底面的材料价格为每单位面积 $a$ 元，侧面的材料价格为每单位面积 $b$ 元，问直径与

高的比例为多少时造价最省？

**解** 设圆柱形容器的底面直径为 D，高为 H。则容积$V=\frac{1}{4}\pi D^2H$，造价为

$$P=\frac{2}{4}\pi D^2a+\pi DHb=\frac{1}{2}\pi D^2a+\frac{4Vb}{D},$$
$$\frac{dP}{dD}=\pi Da-\frac{4Vb}{D^2}=0,$$

解得

$$D=\sqrt[3]{\frac{4Vb}{\pi a}},\quad H=\frac{4V}{\pi D^2},$$

这时$\frac{D}{H}=\frac{\pi D^3}{4V}=\frac{b}{a}$，所以，当直径与高的比例为$\frac{b}{a}$时造价最省。

19． 要建造一个变电站 M 向 A、B 两地送电（图 5.5.6），M 与 A 之间的电缆每千米$a$元，与 B 之间的电缆每千米$b$元，为使总投资最小，问变电站 M 的位置应满足什么性质？

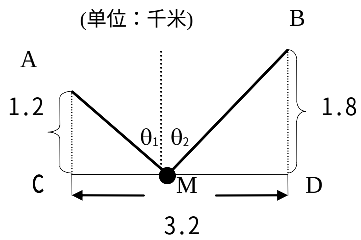



图 5.5.6

**解** 设 C 与 M 之间距离为 x，则

$$|AM|=\sqrt{x^2+1.2^2},\quad |BM|=\sqrt{(3.2-x)^2+1.8^2},$$

变电站的总投资为

$$\begin{aligned}P&=a|AM|+b|BM|\\&=a\sqrt{1.44+x^2}+b\sqrt{3.24+(3.2-x)^2},\end{aligned}$$

由

$$\frac{dP}{dx}=\frac{ax}{|AM|}-\frac{b(3.2-x)}{|BM|}=0,$$

得到

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\dfrac{|CM|}{|AM|}}{\dfrac{|DM|}{|BM|}}=\frac{b}{a},$$

这就是变电站 M 的位置应满足的性质。

# 习　题　6.1

1. 求下列不定积分：

(1) $\int(x^3+2x^2-5\sqrt{x})dx$；　(2) $\int(\sin x+3e^x)dx$；

(3) $\int(x^a+a^x)dx$；　(4) $\int(2+\cot^2 x)dx$；

(5) $\int(2\csc^2 x-\sec x\tan x)dx$；　(6) $\int(x^2-2)^3dx$；

(7) $\int(x+\frac{1}{x})^2dx$；　(8) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$；

(9) $\int\left(2^x+\frac{1}{3^x}\right)^2dx$；　(10) $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$；

(11) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$；　(12) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$；

(13) $\int(1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$；　(14) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

解（1） $\int(x^3+2x^2-5\sqrt{x})dx=\int x^3dx+2\int x^2dx-5\int\sqrt{x}dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$。

（2） $\int(\sin x+3e^x)dx=\int\sin xdx+3\int e^xdx=-\cos x+3e^x+C$。

（3） $\int(x^a+a^x)dx=\int x^adx+\int a^xdx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a\neq 1)$。

（4） $\int(2+\cot^2 x)dx=\int(1+\csc^2 x)dx=x-\cot x+C$。

（5） $\int(2\csc^2 x-\sec x\tan x)dx=2\int\csc^2 xdx-\int\sec x\tan xdx=-2\cot x-\sec x+C$。

（6） $\int(x^2-2)^3dx=\int(x^6-6x^4+12x^2-8)dx=\frac{1}{7}x^7-\frac{6}{5}x^5+4x^3-8x+C$。

（7） $\int(x+\frac{1}{x})^2dx=\int(x^2+2+\frac{1}{x^2})dx=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$。

（8） $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

$=\int(2+\frac{1}{\sqrt[6]{x^7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})dx=2x-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$。

（9） $\int\left(2^x+\frac{1}{3^x}\right)^2dx=\int\left(4^x+2\cdot(\frac{2}{3})^x+\frac{1}{9^x}\right)dx$

$=\frac{1}{\ln 4}4^x+\frac{2}{\ln 2-\ln 3}(\frac{2}{3})^x-\frac{1}{\ln 9}\frac{1}{9^x}+C$。

（10） $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx=\int 2dx-5\int(\frac{2}{3})^x dx=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\cdot(\frac{2}{3})^x+C$。

（11） $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$。

（12） $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=2\int\frac{dx}{1+x^2}-3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\arctan x-3\arcsin x+C$。

（13） $\int(1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{11}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}}+C$。

（14） $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\csc^2 xdx-\int\sec^2 xdx$

$=-\cot x-\tan x+C=-2\csc 2x+C$。

2. 曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(\mathrm{e},-1)$，且在任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数，求该曲线的方程。

解 由题意，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,y)$ 处的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$，于是 $y=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$，将点 $(\mathrm{e},-1)$ 代入，得 $C=-2$，所以曲线的方程为 $y=\ln|x|-2$。

3. 已知曲线 $y=f(x)$ 在任意一点 $(x,f(x))$ 处的切线斜率都比该点横坐标的立方根少 1，

（1） 求出该曲线方程的所有可能形式，并在直角坐标系中画出示意图；

（2） 若已知该曲线经过 $(1,1)$ 点，求该曲线的方程。

解（1）由题意可得 $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{x}-1$，所以 $y=\int(\sqrt[3]{x}-1)dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+C$，这

就是所求曲线方程的所有可能形式。

（2）将点$(1,1)$代入上述方程，可得$C=\frac{5}{4}$，所以过点$(1,1)$的曲线方程为$y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+\frac{5}{4}$。

# 习　题　6.2　换元积分法和分部积分法

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{4x-3}$；　　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$；

(3) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$；　　(4) $\int e^{3x+2}\,dx$；

(5) $\int (2^x + 3^x)^2\,dx$；　　(6) $\int \frac{1}{2+5x^2}\,dx$；

(7) $\int \sin^5 x dx$；　　(8) $\int \tan^{10} x \sec^2 x dx$；

(9) $\int \sin 5x \cos 3x dx$；　　(10) $\int \cos^2 5x dx$；

(11) $\int \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2}$；　　(12) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$；

(13) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}}$；　　(14) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$；

(15) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,dx$；　　(16) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$；

(17) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$；　　(18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$；

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$；　　(20) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$.

解　(1) $\int \frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x-3)}{4x-3} = \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$。

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}x) + C$。

(3) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{d\,e^x}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$。

(4) $\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+2}\,d(3x+2) = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C$。

(5) $\int (2^x+3^x)^2dx=\int (2^{2x}+2\cdot 6^x+3^{2x})dx=\frac{1}{2\ln 2}2^{2x}+\frac{2}{\ln 6}6^x+\frac{1}{2\ln 3}3^{2x}+C$。

(6) $\int \frac{1}{2+5x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{2+5x^2}d(\sqrt{5}x)=\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\sqrt{\frac{5}{2}}x+C$。

(7) $\int \sin^5 xdx=\int (1-\cos^2 x)^2\sin xdx=-\int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)d\cos x$

$=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$。

(8) $\int \tan^{10}x\sec^2 xdx=\int \tan^{10}xd\tan x=\frac{1}{11}\tan^{11}x+C$。

(9) $\int \sin 5x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int (\sin 8x+\sin 2x)dx=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$。

(10) $\int \cos^2 5xdx=\frac{1}{2}\int (1+\cos 10x)dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin 10x+C$。

(11) $\int \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2}=\int \frac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{x^2+4x+5}+C$。

(12) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int \sin\sqrt{x}d\sqrt{x}=-2\cos\sqrt{x}+C$。

(13) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}}=-\frac{1}{6}\int \frac{d(1-2x^3)}{\sqrt[4]{1-2x^3}}=-\frac{2}{9}(1-2x^3)^{\frac{3}{4}}+C$。

(14) $\int \frac{1}{1-\sin x}dx=\int \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}d(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})=-\cot(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+C$。

(15) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$。

(16) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^2}=-\frac{1}{\arcsin x}+C$。

(17) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}=\int \frac{d(x-1)}{1+(x-1)^2}=\arctan(x-1)+C$。

(18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{1}{8}\int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$。

$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$。

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \tan\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2}=-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C$。

（20） $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\sin^2 x}{1+\sin^4 x}=\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$。

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$；

(2) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；

(3) $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

(4) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$ .

(5) $\int(x-1)(x+2)^{20}dx$；

(6) $\int x^2(x+1)^n dx$；

(7) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(8) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$；

(9) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(10) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$；

(11) $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$；

(12) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$；

(13) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$；

(14) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$；

(15) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(16) $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$；

(17) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$；

(18) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

(19) $\int\frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}dx$；

(20) $\int\frac{1}{x(x^n+1)}dx$；

解（1） $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\int\frac{de^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}+1}}=-\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1})+C$

$=\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-x+C$。

（2）当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^{-2}+1}}=-\int\frac{dx^{-1}}{\sqrt{1+x^{-2}}}=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|}+C$$ ；

当 $x<0$ 时，也有相同结果。

（3） $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}$

$=\arctan^2\sqrt{x}+C$。

（4） $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx = \int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x}+C$。

（5） $\int (x-1)(x+2)^{20}dx = \int [(x+2)^{21}-3(x+2)^{20}]dx$

$=\frac{1}{22}(x+2)^{22}-\frac{1}{7}(x+2)^{21}+C$。

（6） $\int x^2(x+1)^n dx = \int [(x+1)^{n+2}-2(x+1)^{n+1}+(x+1)^n]dx$

$=\frac{1}{n+3}(x+1)^{n+3}-\frac{2}{n+2}(x+1)^{n+2}+\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}+C$。

（7）当 $x>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{1+x^{-2}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(x^{-2}+1-1)dx^{-2}}{\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C \quad ;$$

当 $x<0$ 时，也有相同结果。

注：本题也可令 $x=\tan t$ 化简后解得。

（8）当 $x>0$ 时，

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{x^2-9}{x\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}+3\int \frac{d(3x^{-1})}{\sqrt{1-9x^{-2}}}$$

$$=\sqrt{x^2-9}+3\arcsin\frac{3}{x}+C \quad ;$$

当 $x<0$ 时，也有相同结果。

注：本题也可令 $x=3\sec t$ 化简后解得。

（9）令 $x=\sin t$，则

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int\frac{\cos tdt}{\cos^3 t}=\int\sec^2 tdt=\tan t+c=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C。$$

（10）令 $x=a\tan t$，则

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\int\frac{\cos t}{a^2}dt=\frac{1}{a^2}\sin t+c=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C。$$

（11）$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=\int\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$。

（12）$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}dx=-\int\sqrt{2ax-x^2}dx+\int\frac{2ax}{\sqrt{2ax-x^2}}dx$

$$=-\int\sqrt{2ax-x^2}dx-a\int\frac{d(2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}}+2a^2\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=-\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x-a}{a}-2a\sqrt{2ax-x^2}+C$$

$$=-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x-a}{a}+C。$$

注：本题答案也可写成 $-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}+C$。

（13）令 $t=\sqrt{2x}$，则 $x=\frac{1}{2}t^2, dx=tdt$，于是

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}=\int\frac{tdt}{1+t}=t-\ln|1+t|+c=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C。$$

（14）令 $t=\sqrt[3]{1-x}$，则 $x=1-t^3, dx=-3t^2dt$，于是

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx=-3\int(1-t^3)^2t^3dt=-3\int(t^3-2t^6+t^9)dt$$

$$=-\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{10}(1-x)^{\frac{10}{3}}+C。$$

（15）$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}}=-\int\frac{dx^{-1}}{\sqrt{1-x^{-2}}}=\arccos\frac{1}{x}+C$。

（16）令 $x=a\sin t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int a^2\sin^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+c=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C。$$

（17）令 $x=a\cos t$ ，则

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=-\frac{1}{a^2}\int\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}dt=-\frac{1}{a^2}\int\tan^2 td\tan x$$

$$=-\frac{1}{3a^2}\tan^3 t+c=-\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^3}+C。$$

（18）$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(1-\sqrt{1-x^2})dx}{x^2}=-\frac{1}{x}-\int\frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx^{-2}}{\sqrt{x^{-2}-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+\arcsin x+C。$$

注：本题也可令 $x=\sin t$ 后，解得

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\tan(\frac{1}{2}\arcsin x)+C。$$

（19）令 $t=x^4-1$，则

$$\int\frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^{12}}{(x^4-1)^3}dx^4=\frac{1}{4}\int\frac{(t+1)^3}{t^3}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+\frac{3}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^3})dt=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}\ln|t|-\frac{3}{4t}-\frac{1}{8t^2}+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}\ln|x^4-1|-\frac{3}{4(x^4-1)}-\frac{1}{8(x^4-1)^2}+C。$$

（20）$\int\frac{1}{x(x^n+1)}dx=\int\frac{1}{x^{n+1}(1+x^{-n})}dx=-\frac{1}{n}\int\frac{dx^{-n}}{1+x^{-n}}$

$$=-\frac{1}{n}\ln|1+x^{-n}|+c=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C。$$

3. 求下列不定积分：

(1) $\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$；

(2) $\int x\ln(x-1)\,dx$；

(3) $\int x^2\sin 3xdx$；

(4) $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$；

(5) $\int x\cos^2 xdx$； (6) $\int \arcsin x\,dx$；

(7) $\int \operatorname{arc}\tan xdx$； (8) $\int x^2 \operatorname{arc}\tan xdx$；

(9) $\int x\tan^2 xdx$； (10) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$；

(11) $\int \ln^2 x\,dx$； (12) $\int x^2\ln x\,dx$；

(13) $\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5xdx$； (14) $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\,dx$；

(15) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$； (16) $\int \cos(\ln x)\,dx$；

(17) $\int (\arcsin x)^2 dx$； (18) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx$；

(19) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\,dx$； (20) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$.

**解** （1） $\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C$。

(2) $\int x\ln(x-1)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-1}dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C$。

（3） $\int x^2\sin 3xdx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3xdx$

$= \frac{1}{9}(2x\sin 3x - 3x^2\cos 3x) - \frac{2}{9}\int \sin 3xdx$

$= \frac{2}{9}x\sin 3x - (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27})\cos 3x + C$。

（4） $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cot x + \int \cot xdx = -x\cot x + \ln\left|\sin x\right| + C$。

（5） $\int x\cos^2 xdx = \frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x) - \frac{1}{4}\int \sin 2xdx$

$= \frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x) + \frac{1}{8}\cos 2x + C$。

（6） $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$。

（7） $\int \operatorname{arc}\tan xdx = x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$。

（8） $\int x^2\operatorname{arc}\tan xdx = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}\int \frac{xdx}{1+x^2}$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$。

(9) $\int x\tan^2 xdx = \int x(\sec^2 x - 1)dx = x\tan x - \frac{1}{2}x^2 - \int \tan xdx$

$= x\tan x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\cos x| + C$。

(10) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx = -2\int \arcsin xd\sqrt{1-x} = -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$。

(11) $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$。

(12) $\int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$。

(13) $\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5xdx = -e^{-x}\sin 5x + 5\int e^{-x}\cos 5xdx$

$= -e^{-x}(\sin 5x + 5\cos 5x) - 25\int e^{-x}\sin 5xdx$，

所以

$$\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5xdx = -\frac{1}{26}e^{-x}(\sin 5x + 5\cos 5x) + C。$$

(14) $\int \mathrm{e}^x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2xdx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx$。

$\int e^x\cos 2xdx = e^x\cos 2x + 2\int e^x \sin 2xdx = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) - 4\int e^x\cos 2xdx$，

从而

$$\int e^x\cos 2xdx = \frac{1}{5}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C，$$

所以

$$\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{10}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C。$$

(15) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x}{x} + 3\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x}{x} + 6\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$= -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x}{x} + 6\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6}{x} + C$。

(16) $\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$

$= x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x)dx$，

所以

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C \text{。}$$

注：若令 $t=\ln x$，则可看出本题与第（13）题本质上是同一种类型题。

（17）$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C \text{。}$$

（18）令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，于是

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t t dt = 2e^t t^2 - 4\int te^t dt = 2e^t(t^2-2t)+4\int e^t dt$$

$$= 2e^t(t^2-2t+2)+c = 2e^{\sqrt{x}}(x-2\sqrt{x}+2)+C \text{。}$$

（19）令 $t=\sqrt{x+1}$，则 $x=t^2-1$，于是

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int \mathrm{e}^t\,tdt = 2te^t - 2\int e^t dt = 2e^t(t-1)+c = 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)+C \text{。}$$

（20）$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C \text{。}$$

4． 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{1+x\sin x}$，求 $\int f(x)f'(x)dx$。

解 由题意

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+x\sin x}\right)' = \frac{\cos x - \sin^2 x}{(1+x\sin x)^2}，$$

于是

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)df(x) = \frac{1}{2}f^2(x)+C = \frac{(\cos x-\sin^2 x)^2}{2(1+x\sin x)^4}+C \text{。}$$

5．设 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$，求 $f(x)$。

解 设 $t=\sin^2 x$，则

$$f'(t) = 1-2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = 1-2t+\frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t}-2t，$$

从而

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\frac{1}{1-x}-2x)dx=-\ln|1-x|-x^2+C\text{。}$$

6．设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)dx$。

解 令 $t=\ln x$，则 $x=e^t, f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$，于是

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)de^{-x}=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}+\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\int\frac{1}{e^{-x}+1}de^{-x}=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\ln(e^{-x}+1)+C$$

$$=-(e^{-x}+1)\ln(1+e^x)+x+C\text{。}$$

7. 求不定积分 $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ 与 $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$。

解 记 $I_1=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，$I_2=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$，则

$$I_1+I_2=\int dx=x+C_1,\quad I_1-I_2=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C_2,$$

于是

$$I_1=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C,\quad I_2=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C\text{。}$$

8．求下列不定积分的递推表达式（$n$ 为非负整数）：

(1) $I_n=\int\sin^n xdx$；　　(2) $I_n=\int\tan^n xdx$；

(3) $I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$；　　(4) $I_n=\int x^n\sin x\,dx$；

(5) $I_n=\int e^x\sin^n x\,dx$；　　(6) $I_n=\int x^\alpha\ln^n xdx$；

(7) $I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　(8) $I_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1+x}}$.

解（1）

$$I_n=\int\sin^n xdx=-\int\sin^{n-1}xd\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(I_{n-2}-I_n),$$

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}\,(n=2,3,4,\cdots)\text{，}$$

其中$\mathrm{I}_0=x+C,\mathrm{I}_1=-\cos x+C$。

（2） $\mathrm{I}_n=\int\tan^n xdx=\int\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx=\int\tan^{n-2}xd\tan x-\mathrm{I}_{n-2}$

$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)$，

其中$I_0=x+C,I_1=-\ln|\cos x|+C$。

（3） $\mathrm{I}_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}=\int\frac{d\tan x}{\cos^{n-2}x}=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)\int\frac{\tan x}{\cos^{n-1}x}\sin xdx$

$=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x}dx=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)(\mathrm{I}_n-\mathrm{I}_{n-2})$，

于是

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)\text{，}$$

其中$I_0=x+C,I_1=\ln|\sec x+\tan x|+C$。

（4） $\mathrm{I}_n=\int x^n\sin x\,dx=-\int x^n d\cos x=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos xdx$

$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\int x^{n-2}\sin xdx$

$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)$，

其中$I_0=-\cos x+C,I_1=-x\cos x+\sin x+C$。

（5） $\mathrm{I}_n=\int \mathrm{e}^x\sin^n x\,dx=e^x\sin^n x-n\int\mathrm{e}^x\sin^{n-1}x\cos xdx$

$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n\int\mathrm{e}^x[(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x]dx$

$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n[(n-1)\mathrm{I}_{n-2}-n\mathrm{I}_n]$，

于是

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{1+n^2}e^x(\sin^n x-n\sin^{n-1}x\cos x)+\frac{n(n-1)}{1+n^2}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)\text{，}$$

其中$I_0=e^x+C,I_1=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$。

（6）当$\alpha=-1$时，

$$\mathrm{I}_n=\int x^{-1}\ln^n x dx=\int \ln^n x\, d\ln x=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}x+C\ ;$$

当$\alpha\neq -1$时，

$$\mathrm{I}_n=\int x^{\alpha}\ln^n x dx=\frac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha}\ln^n x-n\int x^{1+\alpha}\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\ln^n x-\frac{n}{1+\alpha}\mathrm{I}_{n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)\ ,$$

其中$I_0=\dfrac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}+C$。

（7）$\mathrm{I}_n=\int\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int x^{n-1}d\sqrt{1-x^2}=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx$

$$=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int\frac{x^{n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)(\mathrm{I}_{n-2}-\mathrm{I}_n)\ ,$$

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)\ ,$$

其中$I_0=\arcsin x+C,\ I_1=-\sqrt{1-x^2}+C$。

（8）$\mathrm{I}_n=\int\dfrac{dx}{x^n\sqrt{1+x}}=2\int\dfrac{d\sqrt{1+x}}{x^n}=2\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n\int\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^{n+1}}dx$

$$=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n\int\frac{1+x}{x^{n+1}\sqrt{1+x}}dx=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n(\mathrm{I}_{n+1}+\mathrm{I}_n),$$

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n-1}\frac{\sqrt{1+x}}{x^{n-1}}-\frac{2n-3}{2n-2}\mathrm{I}_{n-1}\ (\mathrm{n}=2,3,4,\cdots)。$$

其中$I_0=2\sqrt{1+x}+C,\quad I_1=\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$。

9．导出求$\int\dfrac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2}$，$\int\dfrac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$和$\int(ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}dx$型不定积分的公式。

解 $\int\dfrac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2}=\dfrac{a}{2}\int\dfrac{d(x^2+2\xi x+\eta^2)}{x^2+2\xi x+\eta^2}+(b-a\xi)\int\dfrac{dx}{(x+\xi)^2+\eta^2-\xi^2}$

$$=\begin{cases} a\ln|x+\xi|-\dfrac{b-a\xi}{x+\xi}+C, \quad |\xi|=|\eta|\text{；} \\ \dfrac{a}{2}\ln|x^2+2\xi x+\eta^2|+\dfrac{b-a\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\arctan\dfrac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}+C, \quad |\xi|<|\eta|\text{；} \\ \dfrac{a}{2}\ln|x^2+2\xi x+\eta^2|+\dfrac{b-a\xi}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\ln\left|\dfrac{x+\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{x+\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\right|+C, \quad |\xi|>|\eta|\text{。} \end{cases}$$

$$\int\frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}=\frac{a}{2}\int\frac{d(x^2+2\xi x+\eta^2)}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}+(b-a\xi)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$$

$$=a\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}+(b-a\xi)\ln\left|x+\xi+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|+C\text{。}$$

$$\int(ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,dx$$

$$=\frac{a}{2}\int\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,d(x^2+2\xi x+\eta^2)+(b-a\xi)\int\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,dx$$

$$=\frac{a}{3}(x^2+2\xi x+\eta^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{b-a\xi}{2}\left[(x+\xi)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}+(\eta^2-\xi^2)\ln\left|(x+\xi)+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|\right]\text{。}$$

10．求下列不定积分：

(1) $\int(5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\,dx$；　　(2) $\int(x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\,dx$；

(3) $\int\dfrac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$；　　(4) $\int\dfrac{(x+2)dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

解 (1) $\int(5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\,dx=\dfrac{5}{2}\int\sqrt{x^2+x+2}\,d(x^2+x+2)+\dfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2+x+2}\,dx$

$$=\frac{5}{3}(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2x+1}{8}\sqrt{x^2+x+2}+\frac{7}{16}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2})+C\text{。}$$

(2) $\int(x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\,dx=\dfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2+2x-5}\,d(x^2+2x-5)-2\int\sqrt{x^2+2x-5}\,dx$

$$=\frac{1}{3}(x^2+2x-5)^{\frac{3}{2}}-(x+1)\sqrt{x^2+2x-5}+6\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-5}\right|+C\text{。}$$

(3) $\int\dfrac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{3}{2}\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$

$=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+C$。

（4） $\int\frac{(x+2)dx}{\sqrt{5+x-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(5+x-x^2)}{\sqrt{5+x-x^2}}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$

$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C$。

11． 设 $n$ 次多项式 $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$ ,系数满足关系 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$，证明不定积分 $\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数。

证 设 $I_k=\int\frac{1}{x^k}e^x dx$，则

$$I_k=-\frac{1}{k-1}\int e^x d\frac{1}{x^{k-1}}=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\int\frac{1}{x^{k-1}}e^x dx，$$

$$=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}I_{k-1}\quad(k=2,3,\cdots,n)，$$

由此得到

$$I_k=q_{k-1}(\frac{1}{x})e^x+\frac{1}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx\ (k=2,3,\cdots,n)，$$

其中 $q_{k-1}(t)$ 是 $t$ 的 $k-1$ 次多项式。当 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$ 时，积分

$$\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx=a_0e^x+\sum_{i=1}^{n}a_i\int\frac{e^x}{x^i}dx=a_0e^x+\sum_{i=2}^{n}a_iq_{i-1}(\frac{1}{x})e^x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx$$

$$=a_0e^x+\sum_{i=2}^{n}a_iq_{i-1}(\frac{1}{x})e^x+C$$

为初等函数。

# 习　　题　6.3

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$；　　(2) $\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$；

(3) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$；　　(4) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$；

(5) $\int \frac{3}{x^3+1}dx$；　　(6) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$；

(7) $\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx$；　　(8) $\int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx$；

(9) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$；　　(10) $\int \frac{dx}{x^4+1}$；

(11) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$；　　(12) $\int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx$；

(13) $\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}dx$；　　(14) $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$；

(15) $\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx$；　　(16) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$。

解（1）$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2(x+1)} + C$。

（2）$\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$

设 $\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$，则

$(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1) \equiv 2x+3$，于是

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A-C=2 \\ B-D=3 \end{cases},$$

解得 $A=1, C=-1, B=\frac{3}{2}, D=-\frac{3}{2}$。所以

$$\int\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{3}{2}\arctan x+C\text{。}$$

（3） $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}\text{，则}$$

$$A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+2)(x+3)^3+C(x+1)(x+3)^3$$

$$+D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2+E(x+1)(x+2)^2(x+3)+F(x+1)(x+2)^2\equiv x\text{。}$$

令 $x=-1$，得到 $A=-\frac{1}{8}$；令 $x=-2$，得到 $C=2$；令 $x=-3$，得到 $F=\frac{3}{2}$；再比较等式两边 $x^5$、$x^4$ 的系数与常数项，得到

$$\begin{cases} A+B+D=0 \\ 13A+12B+C+11D+E=0 \\ 108A+54B+27C+36D+12E+4F=0 \end{cases}\text{。}$$

于是解得 $A=-\frac{1}{8}, B=-5, C=2, D=\frac{41}{8}, E=\frac{13}{4}, F=\frac{3}{2}$，即

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$=-\frac{1}{8(x+1)}-\frac{5}{x+2}+\frac{41}{8(x+3)}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{13}{4(x+3)^2}+\frac{3}{2(x+3)^3}\text{。}$$

所以

$$\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^{41}}{(x+1)(x+2)^{40}}\right|-\frac{2}{x+2}-\frac{13}{4(x+3)}-\frac{3}{4(x+3)^2}+C\text{。}$$

（4）$\int\frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$

$$\frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)}-\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\text{，}$$

所以

$$\int\frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{x+2}-\arctan(x+2)-\int\frac{d(x+2)}{[1+(x+2)^2]^2}$$

$$=-\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{2(x^2+4x+5)}-\frac{3}{2}\arctan(x+2)+C\text{。}$$

（5）$\int\frac{3}{x^3+1}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

（6）解一：$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^3+1)-(x^3-1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}[\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}]+C\text{。}$$

解二：$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)dx}{x^4+x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)dx}{x^4+x^2+1}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\ln\frac{x+x^{-1}+1}{x+x^{-1}-1}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C\text{。}$$

注：本题的答案也可以写成 $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}+C$。

（7）$\int\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx$

$$\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}=x^2-5x+21-\frac{80}{x+4},$$

所以

$$\int\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+21x-80\ln|x+4|+C\text{。}$$

（8）$\int\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx$

$$\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}=1-\frac{5x-7}{(x-1)(x^2+x+6)}=1+\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4}\frac{x+22}{x^2+x+6},$$

所以

$$\int\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx=x+\frac{1}{8}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+6}-\frac{43}{4\sqrt{23}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{23}}+C\text{。}$$

（9）$\int\frac{x^2}{1-x^4}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$。

(10) $\int\frac{dx}{x^4+1}$ $\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1))+C\text{。}$$

(11) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\int\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

(12) $\int\frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx=\int\frac{x^2+x^3-(x^3-1)}{x(x^3-1)}dx=\int\frac{x+x^2}{x^3-1}dx-\int\frac{dx}{x}$

$$=\int\frac{x}{x^3-1}dx+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)dx+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|+C$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\ln|x|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

(13) $\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{x^2+x+1-x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2(x^2+x+1)}+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x+1}{x^2+x+1}+C\text{。}$$

(14) $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx=\int\frac{1+x^7}{x(1+x^7)}dx-\int\frac{2x^6}{1+x^7}dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{2}{7}\int\frac{dx^7}{1+x^7}$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln\left|1+x^7\right|+C。$$

(15) $\int\frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx=\frac{1}{10}\int\frac{d(x^{10}+2x^5+2)}{(x^{10}+2x^5+2)^2}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5+1)}{[1+(x^5+1)^2]^2}$

$$=-\frac{1}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{x^5+1}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C$$

$$=-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C。$$

(16) $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{2n}\int\frac{x^n}{(x^{2n}+1)^2}dx^{2n}=-\frac{1}{2n}\int x^n d\frac{1}{x^{2n}+1}$

$$=-\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1}+\frac{1}{2n}\int\frac{dx^n}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1}+\frac{1}{2n}\arctan x^n+C。$$

2. 在什么条件下，$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数仍是有理函数？

解 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$可化为部分分式 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$，于是

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx\equiv ax^2+bx+c，$$

要使$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数为有理函数，必须$A=0,B=0$，由此可得 $a=0,c=0$。

3. 设$p_n(x)$是一个$n$次多项式，求

$$\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx。$$

解 由于$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$，所以

$$\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)}\frac{1}{(x-a)^{n-k}}+\frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|+C。$$

4. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx$；

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；

(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$；

(4) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$；

(5) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$；

(6) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$；

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$；

(8) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；

(10) $\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}dx$。

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$；

(12) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$；

解（1）$\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx = \frac{1}{2}\int xd\sqrt{2+4x} = \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{2}\int \sqrt{2+4x}dx$

$= \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{12}\sqrt{(2+4x)^3} + C$

$= \frac{1}{6}(x-1)\sqrt{2+4x} + C$。

（2）不妨设$a<b$，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}} = \arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+C$$。

注：本题也可令$x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$，解得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$$。

（3）$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = -\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

$= -\frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$。

（4） $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+x^{-2}}}dx = \int \frac{d(x-x^{-1})}{\sqrt{(x-x^{-1})^2+2}}$

$= \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C$。

注：这里假设 $x>0$，当 $x<0$ 时可得到相同的答案。

（5） $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}dx = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$= \int (x-\sqrt{x^2-1})dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$。

注：本题也可通过作变换 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 来求解。

（6） $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$。

注：本题也可通过作变换 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 来求解。

（7） $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}} = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(1+x)}\right| + c$

$= 2\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}) + C$。

（8） 设 $x=\tan t$，则

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{\tan^4 t \sec t} = \int \frac{\cos^3 t dt}{\sin^4 t} = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t} d\sin t$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} + c = \frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2} + C\text{。}$$

（9） 设 $t=\sqrt[4]{x}$，则 $x=t^4$，$dx=4t^3dt$，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3dt}{t^2+t} = 4\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= 2t^2 - 4t + 4\ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + C\text{。}$$

（10）设$t=\sqrt[3]{\dfrac{x-4}{x+1}}$，则 $x=\dfrac{4+t^3}{1-t^3}$，$dx=\dfrac{15t^2}{(1-t^3)^2}dt$，于是

$$\int\sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}dx=\int t^2\frac{(1-t^3)^2}{25}\frac{15t^2}{(1-t^3)^2}dx=\frac{3}{5}\int t^4dt$$

$$=\frac{3}{25}t^5+c=\frac{3}{25}\sqrt[3]{\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^5}+C。$$

（11）设$t=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}$，则 $x=\dfrac{2+t^3}{1-t^3}$，$dx=\dfrac{9t^2}{(1-t^3)^2}dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1-t^3}{3}\cdot\frac{9t^2}{(1-t^3)^2}dt=3\int\frac{tdt}{1-t^3}$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}-1\right)^2}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2}+\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}+1}-\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-2})-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x+1}}+C。$$

（12）设$t=\sqrt[4]{1+x^4},x^4=t^4-1$，于是

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\frac{t^3dt}{(t^4-1)t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan t+c=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+C。$$

5. 设$R(u,v,w)$是$u,v,w$的有理函数，给出

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx$$

的求法。

解　设$t=\sqrt{a+x}$，则

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx=2\int R(t^2-a,t,\sqrt{t^2-a+b})tdt$$

再令 $\sqrt{t^2-a+b}=t+u$，则 $t=\dfrac{b-a-u^2}{2u}$，从而

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx$$

$$=\int R\left(\left(\frac{b-a-u^2}{2u}\right)^2-a,\frac{b-a-u^2}{2u},\frac{b-a+u^2}{2u}\right)\frac{b-a-u^2}{2u}\cdot\frac{a-b-2u^2}{2u^2}du$$

为有理函数的积分。

6. 求下列不定积分：

(1) $\int\dfrac{dx}{4+5\cos x}$；

(2) $\int\dfrac{dx}{2+\sin x}$；

(3) $\int\dfrac{dx}{3+\sin^2 x}$；

(4) $\int\dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$；

(5) $\int\dfrac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；

(6) $\int\dfrac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$；

(7) $\int\dfrac{dx}{\tan x+\sin x}$；

(8) $\int\dfrac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$；

(9) $\int\tan x\tan(x+a)dx$；

(10) $\int\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$；

(11) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$；

(12) $\int\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$。

解（1）设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$,则 $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, x=2\arctan u, dx=\dfrac{2du}{1+u^2}$，于是

$$\int\frac{dx}{4+5\cos x}=\int\frac{2du}{9-u^2}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+u}{3-u}\right|+c=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C。$$

（2）设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$,则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}, x=2\arctan u, dx=\dfrac{2du}{1+u^2}$，于是

$$\int\frac{dx}{2+\sin x}=\int\frac{du}{1+u+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C。$$

（3）$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{\csc^2 x dx}{3\csc^2 x+1}=-\int\frac{d\cot x}{4+3\cot^2 x}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x+C$。

注：本题也可通过作变换$t=\tan\frac{x}{2}$，解得

$$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2})+C\text{。}$$

（4）$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2(\tan\frac{x}{2}+1)}dx$

$$=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}d\tan\frac{x}{2}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C\text{。}$$

（5）设$u=\tan\frac{x}{2}$,则$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},x=2\arctan u,dx=\frac{2du}{1+u^2}$，

于是

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{du}{3u^2+2u+2}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{(u+\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+c=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C\text{。}$$

（6）$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\sin xdx}{(2+\cos x)\sin^2 x}=-\int\frac{d\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{2+\cos x+1-\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}d\cos x$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{2+\cos x}\right)d\cos x$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+\cos x}{2+\cos x}\right|+c=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C\text{。}$$

（7）$\int\frac{dx}{\tan x+\sin x}=\int\frac{\cos xdx}{\sin x(1+\cos x)}=-\int\frac{\cos xd\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(1+\cos x)-(1-\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}d\cos x=-\frac{1}{2}\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{d\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{2(1+\cos x)}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C。$$

(8) $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\left(\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right)dx=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C。$$

(9) $\int\tan x\tan(x+a)dx$

当 $a=\frac{k\pi}{2}$ 时， 原积分容易求得。

当 $a\neq\frac{k\pi}{2}$ 时，

$$\int\tan x\tan(x+a)dx=\int\left(\frac{\tan(x+a)-\tan x}{\tan a}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{\tan a}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|-x+C。$$

(10) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\csc(x+\frac{\pi}{4})d(x+\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|+C。$$

(11) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}$

$$=\tan x-\cot x+C=-2\cot 2x+C。$$

(12) $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{1+\sin^2 x-1}{1+\sin^2 x}dx=x-\int\frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}$

$$=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C。$$

7. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}dx$；　(2) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$；

(3) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$；　(4) $\int \sqrt{x}\ \ln^2 x\,dx$；

(5) $\int x^2 e^x \sin x dx$；　(6) $\int \ln(1+x^2)dx$

(7) $\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(8) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx$；

(9) $\int \arctan\sqrt{x}dx$；　(10) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$

(11) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；　(12) $\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx$；

(13) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$；　(14) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$；

(15) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$；　(16) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$（$ab\neq 0$）；

(17) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$；　(18) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$；

(19) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$；　(20) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$。

**解**（1） $\int \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}dx = -\int x e^x d\frac{1}{1+x} = -\frac{x e^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(e^x+xe^x)dx = \frac{e^x}{1+x}+C$。

（2） $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \int \ln x d\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\ln x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$。

（3） $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2\int \sqrt{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C$。

（4） $\int \sqrt{x}\ \ln^2 x\,dx = \frac{2}{3}\int \ln^2 x dx^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx$

$$= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln^2 x - 4\ln x) + \frac{8}{9}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{27}x^{\frac{3}{2}}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8) + C \text{。}$$

（5） $\int x^2 e^x \sin x dx = \int x^2 \sin x d e^x = x^2 e^x \sin x - \int e^x (2x\sin x + x^2 \cos x)dx$

$$= e^x (x^2 \sin x - 2x\sin x - x^2 \cos x) + \int e^x (2\sin x + 4x\cos x - x^2 \sin x)dx \text{，}$$

于是

$$\int x^2 e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x (x^2 \sin x - 2x\sin x - x^2 \cos x) + \frac{1}{2}\int e^x (2\sin x + 4x\cos x)dx \text{。}$$

由于

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x (\sin x - \cos x) + C \text{，}$$

$$\int e^x x\cos x dx = \int x\cos x de^x = e^x x\cos x - \int e^x (\cos x - x\sin x)dx$$

$$= e^x x\cos x - \int e^x \cos x dx + \int x\sin x de^x$$

$$= e^x x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x dx - \int e^x (\sin x + x\cos x)dx \text{，}$$

从而

$$\int e^x x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x x(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}\int e^x (\cos x + \sin x)dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x x(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}e^x \sin x + C \text{，}$$

所以

$$\int x^2 e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x [(x^2 - 1)\sin x - (x-1)^2 \cos x] + C \text{。}$$

（6） $\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$ 。

（7） $\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int x\arcsin x d\sqrt{1-x^2}$

$$= -x\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})dx$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{2}x^2+\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin xdx$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{2}x^2+\int\arcsin xd\arcsin x-\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\text{，}$$

所以

$$\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C\text{。}$$

（8） $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}}dx^{-1}$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{4}{9}-(x^{-1}+\frac{1}{3})^2}}d(x^{-1}+\frac{1}{3})=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3+x}{2x}+C\text{。}$$

注：本题也可通过作变换$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$，解得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{3x+3}{x-3}}+C\text{。}$$

（9） $\int\arctan\sqrt{x}dx=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}d\sqrt{x}=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\int\frac{d\sqrt{x}}{1+x}$

$$=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C\text{。}$$

（10）令$t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，于是

$$\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx=2\int t^2\sin tdt=-2t^2\cos t+4\int t\cos tdt$$

$$=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin tdt=(4-2t^2)\cos t+4t\sin t+c$$

$$=(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C\text{。}$$

（11） $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx-\ln(1+\cos x)=x\tan\frac{x}{2}+C\text{。}$$

(12) $\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx=\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin^2 x}d\sin x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}+\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1+\sin x}\right)d\sin x$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}d\sin x+\sqrt{1+\sin x}$，

在等式右边的积分中，令$t=\sqrt{1+\sin x}$，则

$$\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}d\sin x=\int\frac{2t^2dt}{2-t^2}=-2t+4\int\frac{dt}{2-t^2}=-2t+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|+C，$$

所以

$$\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}+C。$$

(13) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}d\tan x=\tan^2 x\sin x-\int\tan x(\sin x+\tan x\sec x)dx$，

所以

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\int\tan x\sin xdx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|+\frac{1}{2}\sin x+C$$

$$=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|+C。$$

(14) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int e^{\sin x}xd\sin x-\int e^{\sin x}d\sec x$

$=e^{\sin x}(x-\sec x)-\int e^{\sin x}dx+\int\sec x e^{\sin x}\cos xdx$

$=e^{\sin x}(x-\sec x)+C$。

(15) $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{de^x}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$。

(16) $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int\frac{d\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+C$。

(17) 令$t=\sqrt[6]{x}$，则$x=t^6$，于是

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{6}{t(t+1)}dx = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + c = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + C\text{。}$$

（18） $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} - \int x^2\frac{1}{1-x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \int\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C\text{。}$$

（19） $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx = x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)dx$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{2}x^2 - \int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin xdx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{2}x^2 - \int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx + \int\arcsin xd\arcsin x\text{，}$$

所以

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\int\arcsin xd\arcsin x$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + C\text{。}$$

（20） 令$t=e^x$，则

$$\int\frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int\frac{dt}{t(1+t)^2} = \int\left(\frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$$

$$= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + \frac{1}{1+t} + c = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} + C\text{。}$$

# 第七章　定积分

## 习　题　7.1　定积分的概念和可积条件

1. 用定义计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 (ax+b)\,dx$；　　　　(2) $\int_0^1 a^x\,dx$　($a>0$).

解　(1) 取划分：$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$，及 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，于是 $\sum_{i=1}^{n}(a\frac{i}{n}+b)\frac{1}{n}=\frac{a}{2}(1+\frac{1}{n})+b\to\frac{a}{2}+b\ (n\to\infty)$，即

$$\int_0^1 (ax+b)dx=\frac{a}{2}+b。$$

(2) 取划分：$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$，及 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，

于是 $\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}$。因为 $\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to\ln a\ (n\to\infty)$，$a^{\frac{1}{n}}\to1\ (n\to\infty)$，

所以$\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}\to\frac{a-1}{\ln a}$，　即

$$\int_0^1 a^x\,dx=\frac{a-1}{\ln a}。$$

2.　证明，若对$[a,b]$的任意划分和任意$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$都存在，则$f(x)$必是$[a,b]$上的有界函数。

证　用反证法。设$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I$，则取$\varepsilon=1,\exists\delta>0$，对任意的划分$P$与任意$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$，　就有$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|<|I|+1$。取定了划分后，$n$与$\Delta x_i\,(i=1,2,\cdots n)$也就确定，如果$f(x)$在$[a,b]$上无界，则必定存在小区间$[x_{i-1},x_i]$，　$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上无界。取定

$\xi_1,\cdots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_n$，必可取到$\xi_i$，使 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I|+1$ 不成立，从而产生矛盾，所以 $f(x)$必是$[a,b]$上的有界函数。

3. 证明 Darboux 定理的后半部分：对任意有界函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=l。$$

证 $\forall\varepsilon>0$，因为$l$是$\underline{\mathbf{S}}$的上确界，所以 $\exists\underline{S}(P')\in\underline{\mathbf{S}}$，使得

$$0\le l-\underline{S}(P')<\frac{\varepsilon}{2}。$$

设划分$P': a=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_p'=b$， $M,m$是 $f(x)$的上、下确界，取

$$\delta=\min\left(\Delta x_1',\Delta x_2',\cdots,\Delta x_p',\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right),$$

对任意一个满足$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$的划分

$$P: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

记与其相应的小和为$\underline{S}(P)$，现将$P',P$的分点合在一起组成新的划分$P''$，则由引理 7.1.1，$\underline{S}(P')-\underline{S}(P'')\le 0$。

下面来估计$\underline{S}(P'')-\underline{S}(P)$：

（1）若在$(x_{i-1},x_i)$中没有$P'$的分点，则$\underline{S}(P''),\underline{S}(P)$中的相应项相同，它们的差为零；

（2）若在$(x_{i-1},x_i)$中含有$P'$的分点，由于两种划分的端点重合，所以这样的区间至多只有$p-1$个。由$\delta$的取法，可知

$$\Delta x_i\le\delta\le\Delta x_j',\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,p,$$

所以在$(x_{i-1},x_i)$中只有一个新插入的分点$x_j'$，这时$\underline{S}(P''),\underline{S}(P)$中的相应项的差为

$$[m_i'(x_j'-x_{i-1})+m_i''(x_i-x_j')]-m_i(x_i-x_{i-1})\le(M-m)(x_i-x_{i-1})<(M-m)\delta,$$

从而 $0 \le \underline{S}(P'') - \underline{S}(P) < (p-1)(M-m)\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$。

综合上面的结论，就有

$$0 \le l - \underline{S}(P) = [l - \underline{S}(P')] + [\underline{S}(P') - \underline{S}(P'')] + [\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)] < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{\lambda \to 0} \underline{S}(P) = l。$$

4. 证明定理 7.1.3。

证 必要性是显然的，下面证充分性。

设 $\forall \varepsilon > 0$，存在一种划分 $P'$，使得相应的振幅满足 $\sum_{i=1}^{p} \omega_i' \Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{3}$，即 $\overline{S}(P') - \underline{S}(P') < \frac{\varepsilon}{3}$。取 $\delta = \min\left(\Delta x_1', \Delta x_2', \cdots, \Delta x_p', \frac{\varepsilon}{3(p-1)(M-m)}\right)$，对任意一个满足 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}(\Delta x_i) < \delta$ 的划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

现将 $P', P$ 的分点合在一起组成新的划分 $P''$，则由 Darboux 定理的证明过程，可得

$$\begin{aligned}0 \le \overline{S}(P) - \underline{S}(P) &= [\overline{S}(P) - \overline{S}(P'')] + [\overline{S}(P'') - \overline{S}(P')] + \\ &\quad [\overline{S}(P') - \underline{S}(P')] + [\underline{S}(P') - \underline{S}(P'')] + [\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)] \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

由定理 7.1.1，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

5. 讨论下列函数在 [0,1] 的可积性：

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}], & x \ne 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$  (2) $f(x) = \begin{cases} -1, & x\text{为有理数}, \\ 1, & x\text{为无理数}; \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x\text{为有理数}, \\ x, & x\text{为无理数}; \end{cases}$  (4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin\frac{\pi}{x}), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解：(1) $0 \le f(x) < 1$，且 $f(x)$ 在[0,1]上的不连续点为 $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 与 $x = 0$。$\forall \varepsilon > 0$，取定 $m > \frac{2}{\varepsilon}$，$f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{m}, 1]$ 上只有有限个不连续点，所以 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 上可积，即存在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 的一个划分 $P$，使得 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$，将 $P$ 的分点和 0 合在一起，作为[0,1]的划分 $P'$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i' \Delta x_i' = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i + \omega_1' \Delta x_1' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由定理 7.1.3，$f(x)$ 在[0,1]上可积。

(2) 因为对[0,1]的任意划分 $P$，总有 $\omega_i = 2$，所以 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 2$，由定理 7.1.2 可知 $f(x)$ 在[0,1]上不可积。

(3) 因为对[0,1]的任意划分 $P$，$f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅为 $x_i$，于是

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - x_{i-1}) \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2} (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2)$$

$$= \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$ 在[0,1]上不可积。

(4) $-1 \le f(x) \le 1$，且 $f(x)$ 在[0,1]上的不连续点为 $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 与 $x = 0$。$\forall \varepsilon > 0$，取定 $m > \frac{4}{\varepsilon}$，则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 上只有有限个不连续点，所以 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 上可积，即存在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 的划分 $P$，使得 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$。将 $P$ 的分点与 0 合在一起作为[0,1]的划分 $P'$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i' \Delta x_i' = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i + \omega_1' \Delta x_1' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在[0,1]上可积。

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且在 $[a, b]$ 上满足 $|f(x)| \ge m > 0$（$m$ 为常数），

证明$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上也可积。

**证** 任取$[a,b]$的一个划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，则

$$\omega_i(\frac{1}{f})=\sup_{x_{i-1}\le x',x''\le x_i}\left(\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right)\le\frac{1}{m^2}\sup_{x_{i-1}\le x',x''\le x_i}(f(x')-f(x''))=\frac{1}{m^2}\omega_i(f)，$$

由于$f(x)$在$[a,b]$上可积，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$时，

$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<m^2\varepsilon$，从而$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(\frac{1}{f})\Delta x_i<\varepsilon$，所以$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上可积。

7. 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上的不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，证明$f(x)$在$[a,b]$上可积。

**证** 不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，且$c\in(a,b)$，并设$|f(x)|\le M$。$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{12M},c-a,b-c\right\}$，则$\exists N>0$，当$n>N$时，$|x_n-c|<\delta$。

由于$f(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上只有有限个不连续点，所以$f(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上都可积，即存在$[a,c-\delta]$的一个划分$P^{(1)}$和$[c+\delta,b]$的一个划分$P^{(2)}$，使得$\sum\limits_{i}\omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)}<\dfrac{\varepsilon}{3},\sum\limits_{i}\omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)}<\dfrac{\varepsilon}{3}$。将$P^{(1)}$、$P^{(2)}$的分点合并在一起组成$[a,b]$的一个划分$P$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i}\omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)}+\sum_{i}\omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)}+4M\delta<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon，$$

所以$f(x)$在$[a,b]$上可积。

$c=a$或$c=b$的情况可类似证明。

8．设$f(x)$是区间$[a,b]$上的有界函数。证明$f(x)$在$[a,b]$上可积的充分必要条件是对任意给定的$\varepsilon>0$与$\sigma>0$，存在划分$P$，使得振幅$\omega_i\ge\varepsilon$的那些小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度之和$\sum\limits_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i<\sigma$（即振幅不能任意小的那些小

区间的长度之和可以任意小)。

**证** 充分性：设$|f(x)| \le M$。 $\forall \varepsilon = \sigma > 0$，存在划分$P$，使得振幅$\omega_i \ge \varepsilon$的那些小区间的长度之和$\sum\limits_{\omega_i \ge \varepsilon} \Delta x_i < \varepsilon$，于是

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{\omega_i < \varepsilon} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\omega_i \ge \varepsilon} \omega_i \Delta x_i < [(b-a) + 2M]\varepsilon,$$

即$f(x)$在$[a,b]$上可积。

必要性：用反证法，如果存在$\varepsilon_0 > 0$与$\sigma_0 > 0$，对任意划分$P$，振幅$\omega_i \ge \varepsilon_0$的小区间的长度之和不小于$\sigma_0$，于是

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{\omega_i < \varepsilon_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\omega_i \ge \varepsilon_0} \omega_i \Delta x_i \ge \varepsilon_0 \sum_{\omega_i \ge \varepsilon_0} \Delta x_i \ge \sigma_0 \varepsilon_0,$$

则当$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}(\Delta x_i) \to 0$时，$\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$不趋于零，与$f(x)$在$[a,b]$上可积矛盾。

9. 设$f(x)$在$[a, b]$上可积，$A \le f(x) \le B$，$g(u)$在$[A, B]$上连续，证明复合函数$g(f(x))$ 在$[a, b]$上可积。

**证** 由于$g(u)$在$[A,B]$连续，所以可设$|g(u)| \le M$，且$g(u)$一致连续，于是$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u', u'' \in [A,B]$，只要$|u' - u''| < \delta$，就成立

$$|g(u') - g(u'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}。$$

由于$f(x)$在$[a,b]$可积，由习题 8，对上述$\varepsilon > 0$与$\delta > 0$，存在划分$P$，使得振幅$\omega_i(f) \ge \delta$的小区间的长度之和小于$\frac{\varepsilon}{4M}$，于是

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (g \circ f) \Delta x_i = \sum_{\omega_i(f) < \delta} \omega_i (g \circ f) \Delta x_i + \sum_{\omega_i(f) \ge \delta} \omega_i (g \circ f) \Delta x_i$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\omega_i(f) < \delta} \Delta x_i + 2M \sum_{\omega_i(f) \ge \delta} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon,$$

即复合函数$g(f(x))$在$[a, b]$上可积。

# 习　题　7.2　定积分的基本性质

1．　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，且在 $[a,b]$ 中除了有限个点之外，都有 $f(x)=g(x)$，证明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，并且有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx。$$

证　设仅在 $x=c_i\ (i=1,2,\cdots,p)$ 处 $f(x)\neq g(x)$。对区间 $[a,b]$ 作划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则

$$\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum{}'(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i，$$

其中 $\sum{}'$ 表示仅对含有 $\{c_i\}$ 中点的小区间（至多 $2p$ 个）求和。

记 $M_1=\sup\limits_{a\le x\le b}|g(x)|, M_2=\sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2p(M_1+M_2)}$，则当 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时,

$$\left|\sum{}'(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i\right|<\varepsilon,$$

所以由 $f(x)$ 可积，可知 $g(x)$ 也可积，且成立 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$。

2．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，请举例说明一般有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\neq\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)。$$

解　例如 $f(x)=g(x)=1, x\in[0,2]$，则 $\int_0^2 f(x)dx=2, \int_0^2 g(x)dx=2$，$\int_0^2 f(x)g(x)dx=2$，所以 $\int_a^b f(x)g(x)dx\neq\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)$。

3．　证明：对任意实数 $a,b,c$，只要 $\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在，就成立

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx。$$

证　如设$a<b<c$，则 $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$，于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx。$$

其他情形可类推。

4．判断下列积分的大小：

（1）$\int_0^1 xdx$ 和 $\int_0^1 x^2dx$；　　（2）$\int_1^2 xdx$ 和 $\int_1^2 x^2dx$；

（3）$\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{2})^x dx$ 和 $\int_0^1 2^x dx$；　　（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$。

解（1）当$x\in(0,1)$时，$x>x^2$，所以 $\int_0^1 xdx>\int_0^1 x^2dx$。

（2）当$x\in(1,2)$时，$x<x^2$，所以 $\int_0^1 xdx<\int_0^1 x^2dx$。

（3）当$x\in(-2,-1)$时，$(\frac{1}{2})^x>2$，而当$x\in(0,1)$时，$2^x<2$，

由积分第一中值定理，可得 $\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{2})^x dx>\int_0^1 2^x dx$。

（4）当$x>0$时，$\sin x<x$，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$。

5．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)\ge 0$但不恒为 0，证明

$$\int_a^b f(x)dx>0。$$

证　证明一：不妨设$f(x_0)>0, x_0\in(a,b)$。由$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0$，存在$c>0$与$\delta>0(\delta<\min\{a-x_0,b-x_0\})$，使得当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，成立$f(x)>c$。于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx\ge 2c\delta>0\ 。$$

$f(x_0)>0$，$x_0=a$或$x_0=b$的情况可类似证明。

证明二：用反证法。若$\int_a^b f(x)dx=0$，则$\forall t\in[a,b]$, $\int_a^t f(x)dx=0$。由于$F(t)=\int_a^t f(x)dx$在$[a,b]$上可导，且$F'(t)=f(t), t\in[a,b]$，所以有$f(t)\equiv 0$，与题设矛盾，从而必定成立$\int_a^b f(x)dx>0$。

6．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f^2(x)dx=0$，证明$f(x)$在$[a,b]$上恒为 0。

证 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可知 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f^2(x)\ge 0$。由上题即可得到结论。

7．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且满足

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)。$$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证 由积分第一中值定理，$\exists\eta\in[a,\frac{a+b}{2}],$ 使得

$$f(\eta)=\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)，$$

再对 $f(x)$ 在 $[\eta,b]$ 上应用 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\eta,b)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

8．设 $\varphi(t)$ 在 $[0,a]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)\ge 0$。证明

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)dt\right)\le\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt。$$

证 将区间 $[0,a]$ 作划分：$0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=a$，记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\},\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$。由于 $f$ 下凸，由 Jensen 不等式（第 5.1 节习题 24），得到

$$f\left(\sum_{i=1}^n\varphi(\xi_i)\frac{\Delta t_i}{a}\right)\le\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\frac{\Delta t_i}{a}，$$

令 $\lambda\to 0$，上述不等式就转化为

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)dt\right)\le\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt。$$

9．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，证明对任意 $\alpha\in[0,1]$，成立

$$\int_0^\alpha f(x)dx\ge\alpha\int_0^1 f(x)dx。$$

证 证明一：问题等价于证明对任意 $\alpha\in[0,1]$，成立

$$(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha\int_{\alpha}^1 f(x)dx。$$

对不等式两端应用积分第一中值定理，则存在 $x_1 \in [0,\alpha]$ 及 $x_2 \in [\alpha,1]$，使得 $(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha(1-\alpha)f(x_1)$ 及 $\alpha\int_{\alpha}^1 f(x)dx = \alpha(1-\alpha)f(x_2)$。由于显然有 $f(x_1) \ge f(x_2)$，所以得到 $(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha\int_{\alpha}^1 f(x)dx$。

证明二：设 $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx - \alpha\int_0^1 f(x)dx$，则 $F'(\alpha) = f(\alpha) - \int_0^1 f(x)dx$。由积分第一中值定理，$\exists\xi \in [0,1]$，使得 $f(\xi) = \int_0^1 f(x)dx$，即 $F'(\alpha) = f(\alpha) - f(\xi)$。

由于 $f$ 单调减少，所以当 $0<\alpha<\xi$ 时，$F'(\alpha) \ge 0$，即 $F(\alpha)$ 单调增加；当 $\xi<\alpha<1$ 时，$F'(\alpha) \le 0$，即 $F(\alpha)$ 单调减少。由 $F(0)=F(1)=0$，即可得到 $\forall\alpha \in [0,1]$，成立 $F(\alpha) \ge 0$。

证明三：当 $\alpha = 0$ 时，不等式显然成立。当 $\alpha \in (0,1]$ 时，令 $x = \alpha t$，利用 $f$ 单调减少，就得到 $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha\int_0^1 f(\alpha t)dt \ge \alpha\int_0^1 f(t)dt$。

10．（Young 不等式）设 $y = f(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上严格单调增加的连续函数，且 $f(0)=0$，记它的反函数为 $x = f^{-1}(y)$。证明

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \ge ab \quad (a>0,\ b>0)。$$

**证**　先证当 $b = f(a)$ 时等号成立。

将区间 $[0,a]$ 作划分：$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$，记 $y_i = f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$，则 $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b$，再记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$，于是

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i = \sum_{i=1}^n y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n x_i(y_i - y_{i-1})$$

$$= x_n y_n - x_0 y_0 = ab，$$

记 $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i$ 的极限为

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

这就证明了当 $b=f(a)$ 时， $\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=ab$。

在一般情况下，设 $F(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy-ab$，则 $F'(a)=f(a)-b$。记 $f(T)=b$，可知当 $0<a<T$ 时，$F(a)$ 单调减少，当 $a>T$ 时， $F(a)$ 单调增加，所以 $F(a)$ 在 $a=T$ 处取到最小值。由上面的讨论，可知最小值 $F(T)=0$，从而 $F(a)\ge 0$，这就是所要证明的。

注 当 $b=f(a)$ 时，$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=ab$ 的结论也可直接从几何图形上看出。

11． 证明定积分的连续性：设函数 $f(x)$ 和 $f_h(x)=f(x+h)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f_h(x)-f(x)|dx=0。$$

证 由于 $f_h(x)=f(x+h)$ 在 $[a,b]$ 上可积，可知存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $[a-\delta,b+\delta]$ 上可积。设 $|f(x)|\le M\ \ (x\in[a-\delta,b+\delta])$。

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\forall\varepsilon>0$，存在对区间 $[a,b]$ $n$ 等分的划分 $P$，使得当 $\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{8M}$ 时，成立

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{6}，\text{其中 }\Delta x_i=\frac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)。$$

另外，当 $\frac{b-a}{n}<\delta$ 时，记 $\omega_0,\omega_{n+1}$ 分别是 $f(x)$ 在区间 $[a-\frac{b-a}{n},a]$ 和 $[b,b+\frac{b-a}{n}]$ 上的振幅，则 $\omega_0\le 2M$， $\omega_{n+1}\le 2M$。

因为

$$\int_a^b |f_h(x)-f(x)|dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f_h(x)-f(x)|dx=\sum_{i=1}^{n}\left|f(\xi_i+h)-f(\xi_i)\right|\Delta x_i,$$

且当$|h|<\frac{b-a}{n}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{8M},\delta\right\}$时，由$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，可知

$\xi_i+h\in[x_{i-2},x_{i-1}]\bigcup[x_{i-1},x_i]\bigcup[x_i,x_{i+1}]$，其中$x_{-1}=a-\frac{b-a}{n},\ x_{n+1}=b+\frac{b-a}{n}$，从而

有$|f(\xi_i+h)-f(\xi_i)|\le\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1}$，于是

$\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\,dx\le\sum_{i=1}^{n}(\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1})\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+(\omega_0+\omega_{n+1})\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，

所以

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\,dx=0。$$

12．设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上都可积，证明不等式

(1) （Schwarz 不等式）$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$；

(2) （Minkowski 不等式）

$$\left\{\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\le\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

证（1）由于对任意的$t$，积分$\int_a^b[tf(x)+g(x)]^2dx\ge 0$，即

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0$$

所以其判别式恒为非正的，也就是成立

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\ ；$$

（2）由$\int_a^b f(x)g(x)dx\le\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$，得到

$$\int_a^b f^2(x)dx+2\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx$$

$$\le\int_a^b f^2(x)dx+2\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)dx，$$

即

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \le \left[\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^2，$$

两边开平方，即得到

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

13．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\ge 0$， $g(x)>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{a\le x\le b} f(x)。$$

证　因为在 $[a,b]$ 上 $g(x)>0$，所以有 $0<m\le g(x)\le M<+\infty$。记 $A=f(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$，不妨设 $A>0$ （因为 $A=0$ 时等式显然成立）。 由 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$，可知 $\forall 0<\varepsilon<A$， $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $\xi\in[\alpha,\beta]$，且当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，成立 $0<A-\varepsilon<f(x)\le A$，于是

$$(A-\varepsilon)[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}} \le \left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} \le A[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}。$$

由于当 $n\to\infty$ 时 $[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}}\to 1$ ，$[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}\to 1$ ，所以 $\exists N>0$，当 $n.>N$ 时，成立 $[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}}>1-\frac{\varepsilon}{A}$ 与 $[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}<1+\frac{2\varepsilon}{A}$， 从而当 $n.>N$ 时，成立

$A-2\varepsilon<\left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}<A+2\varepsilon$，即 $\left|\left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}-A\right|<2\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} = A = \max_{a\le x\le b} f(x)。$$

# 习　　题　7.3

1. 设函数 $f(x)$ 连续，求下列函数 $F(x)$ 的导数：

(1) $F(x)=\int_x^b f(t)dt$；　　(2) $F(x)=\int_a^{\ln x} f(t)dt$；

(3) $F(x)=\int_a^{\left(\int_0^x \sin^2 tdt\right)} \frac{1}{1+t^2}dt$ .

解 (1) $F(x)=-\int_b^x f(t)dt$，所以 $F'(x)=-f(x)$。

(2) $F'(x)=f(\ln x)\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x}f(\ln x)$。

(3) $F'(x)=\frac{1}{1+\left(\int_0^x \sin^2 tdt\right)^2}\cdot\sin^2 x=\frac{4\sin^2 x}{4+(x-\sin x\cos x)^2}$。

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}dw}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$ 。

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}dw}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}=2e$。

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^2=\frac{\pi^2}{4}$。

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{u^2}du}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$。

3. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数且恒有 $f(x)>0$，证明 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t\, f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调增加函数。

证　因为

$$g'(x)=\frac{f(x)\left(x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\right)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\geq 0\text{，}$$

所以 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t\, f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调增加函数。

4. 求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ 的极值。

解　$f'(x)=(x-1)(x-2)^2$，令 $f'(x)=0$，得到 $x=1,2$。因为当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $1<x<2$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，所以 $x=1$ 是极小值点，$x=2$ 不是极值点。由

$$f(1)=\int_0^1[(t-2)^3+(t-2)^2]dt=-\frac{17}{12}\text{，}$$

可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极小值 $f(1)=-\dfrac{17}{12}$。

5 利用中值定理求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\,dt$；　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}\,dt$　（$p\in\mathbf{N}$）。

解（1）由积分第一中值定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}=0\quad(0\leq\xi\leq 1)\text{。}$$

(2) 由积分第一中值定理，$\exists\xi\in[n,n+p]$，使得 $\left|\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx\right|=\left|\dfrac{\sin\xi}{\xi}p\right|\leq\dfrac{p}{n}$，

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dt=0\text{。}$$

6. 求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^2(2-x^2)^2 dx$；

(2) $\int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}dx$；

(3) $\int_0^2 (2^x+3^x)^2 dx$；

(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10}dx$；

(5) $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2}$；

(6) $\int_0^1 \arcsin x dx$；

(7) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$；

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$；

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x\, dx$；

(10) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\, dx$；

(11) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arc}\tan x dx$；

(12) $\int_1^{\mathrm{e}+1} x^2 \ln(x-1)dx$。

(13) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 \mathrm{e}^{-x^2} dx$；

(14) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}} dx$；

(15) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$；

(16) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(17) $\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$；

(18) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$；

(19) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；

(20) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$；

解 (1) $\int_0^1 x^2(2-x^2)^2dx = \int_0^1 (4x^2-4x^4+x^6)dx = \frac{4}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{7}=\frac{71}{105}$。

(2) $\int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}dx = \int_1^2 (\frac{x}{2}-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})dx = \ln 2-\frac{1}{2}$。

(3) $\int_0^2 (2^x+3^x)^2 dx = \int_0^2 (4^x+2\cdot 6^x+9^x)dx = \frac{15}{\ln 4}+\frac{70}{\ln 6}+\frac{40}{\ln 3}$。

(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10}dx = -\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-4x^2)^{10}d(1-4x^2) = -\frac{1}{88}(1-4x^2)^{11}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{88}$。

(5) $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{d(x+1)^2}{[(x+1)^2+4]^2} = -\frac{1}{2(x^2+2x+5)}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{16}$。

(6) $\int_0^1 \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}-1$。

（7）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = 0$。（奇函数在对称区间上的积分为零）

（8）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$。

（9）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(1-\cos 2x)dx$，由

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2e^x \sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx$，

得到$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1) + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{10} = \frac{3e^{\frac{\pi}{2}}-2}{5}。$$

（10）$\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x)dx$

$= e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - \int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)dx$,

所以

$$\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)dx = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}。$$

（11）$\int_0^1 x^2 \arctan x dx = \frac{1}{3}x^3 \arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 (x - \frac{x}{1+x^2})dx$

$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2) = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2 - 1}{6}$。

（12）$\int x^2 \ln(x-1)dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x-1) - \frac{1}{3}\int (x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1})dx$

$= \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x-1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right) + c$,

所以

$$\int_1^{\mathrm{e}+1} x^2 \ln(x-1)dx = \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x-1)\Big|_1^{e+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_1^{e+1} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{2}e^2。$$

（13）$\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 \mathrm{e}^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\ln 2}} \mathrm{e}^{-x^2} dx^2$

$= -\frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} = \frac{1 - \ln 2}{4}$。

（14）令$t=\sqrt{x+1}$,则$x=t^2-1$，于是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}}\,dx=2\int_1^{\sqrt{2}} e^{2t}tdt=te^{2t}\Big|_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}} e^{2t}dt=e^{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}e^2\text{。}$$

（15）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}=-\int_0^1\frac{de^{-x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}}=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}})\Big|_0^1=\ln\frac{e(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}$

$$=\ln(\sqrt{1+e^2}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)-1\text{。}$$

（16） 令 $x=\sin t$，则

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos^2 t}=2\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{。}$$

（17）令$t=\frac{x-1}{x+1}$，则 $x=\frac{1+t}{1-t},dx=\frac{2dt}{(1-t)^2}$，于是

$$\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx=\int_{-1}^0\frac{2t^4}{(1-t)^2}dt=2\int_{-1}^0\left(t^2+2t+3-\frac{4}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}\right)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{3}t^3+t^2+3t+4\ln(1-t)+\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{-1}^0=\frac{17}{3}-8\ln 2\text{。}$$

注：本题也可令$t=x+1$，得到

$$\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx=\int_1^2\frac{(t-2)^4}{t^4}dt=\frac{17}{3}-8\ln 2\text{。}$$

（18） $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{d(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。

（19）$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dx^{-1}}{\sqrt{1+x^{-2}}}=-\ln(x^{-1}+\sqrt{1+x^{-2}})\Big|_1^{\sqrt{2}}=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$。

（20） $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

$$=-\int_0^1\frac{2x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx-\int_0^1\frac{d(2x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}}+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=-\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}dt-2\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$=-\frac{\pi}{4}-2+2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi-2。$$

注：本题也可令 $x=1+\sin t$，得到

$$\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\sin t)^2dt=\frac{3}{4}\pi-2。$$

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$。

解 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$。

(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^pdx=\frac{1}{p+1}$。

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i}{n}\pi\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi xdx=\frac{2}{\pi}$。

8. 求下列定积分：

(1) $\int_0^{\pi}\cos^n xdx$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x\,dx$;

(3) $\int_0^a(a^2-x^2)^n\,dx$;

(4) $\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(1-4x^2)^{10}dx$;

(5) $\int_0^1 x^n\ln^m xdx$;

(6) $\int_1^e x\ln^n xdx$.

解 (1) $\int_0^{\pi}\cos^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n xdx$，

在第二个积分中，令 $t=\pi-x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n(\pi-t)dt=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt，$$

所以当 $n$ 为奇数时，$\int_0^{\pi}\cos^n xdx=0$;

当 $n$ 为偶数时，$\int_0^{\pi}\cos^n xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\pi$。

（2）当 $n$ 为奇数时，显然 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx = 0$；

当 $n$ 为偶数时，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx = 2\int_0^{\pi}\sin^n xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx,$$

在积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx$ 中，令 $t=\pi - x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\pi - t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt,$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}2\pi。$$

（3）令 $x = a\sin t$，则

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n dx = a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}tdt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}a^{2n+!}。$$

（4）令 $x=\frac{1}{2}\sin t$，则

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(1-4x^2)^{10}dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^{21}tdt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{21}t - \cos^{23}t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{20!!}{21!!} - \frac{22!!}{23!!}\right) = \frac{1}{184}\frac{20!!}{21!!}。$$

（5）$\int_0^1 x^n \ln^m xdx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln^m x\Big|_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{m-1}xdx$

$$= -\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{m-1}xdx = \cdots = (-1)^m\frac{m!}{(n+1)^m}\int_0^1 x^n dx = (-1)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}。$$

（6）$\int_1^e x\ln^n x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^n x\Big|_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1}x\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1}x\,dx$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{n-1}{2}\int_1^e x\ln^{n-2}x\,dx\right) = \cdots$$

$$=\frac{e^2}{2}[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}]+(-1)^n\frac{n!}{2^n}\int_1^e xdx$$

$$=\frac{e^2}{2}[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2^2}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}]+(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}。$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$。

证（1）令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx。$$

（2）令 $t=\pi-x$，则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx，$$

所以

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx。$$

10. 利用上题结果计算：

(1) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；

(3) $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}dx$。

解（1）$\int_0^{\pi} x\sin^4 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^4 xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3}{16}\pi^2$。

（2）$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{4}\pi^2$。

（3）$\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2。$$

11. 求下列定积分：

(1) $\int_0^6 x^2[x]\,dx$；

(2) $\int_0^2 \mathrm{sgn}(x-x^3)\,dx$；

(3) $\int_0^1 x|x-a|dx$;　　　　(4) $\int_0^2 [e^x]dx$.

解 (1) $\int_0^6 x^2[x]dx = \int_1^2 x^2dx + 2\int_2^3 x^2dx + 3\int_3^4 x^2dx + 4\int_4^5 x^2dx + 5\int_5^6 x^2dx = 285$。

(2) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx = \int_0^1 1dx + \int_1^2 (-1)dx = 0$。

(3) 当 $a \le 0$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx = \int_0^1 x(x-a)dx = \frac{1}{3} - \frac{a}{2};$$

当 $0 < a < 1$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx = \int_0^a x(a-x)dx + \int_a^1 x(x-a)dx = \frac{1}{3}a^3 - \frac{a}{2} + \frac{1}{3};$$

当 $a \ge 1$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx = \int_0^1 x(a-x)dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}。$$

(4) $\int_0^2 [e^x]dx = \int_0^{\ln 2} 1dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3dx + \int_{\ln 4}^{\ln 5} 4dx$

$$+ \int_{\ln 5}^{\ln 6} 5dx + \int_{\ln 6}^{\ln 7} 6dx + \int_{\ln 7}^{2} 7dx$$

$$= 14 - \ln(7!)。$$

12．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且关于 $x=T$ 对称，这里 $a<T<b$。则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{2T-b} f(x)dx + 2\int_T^b f(x)dx。$$

并给出它的几何解释。

证 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{2T-b} f(x)dx + \int_{2T-b}^{T} f(x)dx + \int_T^b f(x)dx$，

由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称，所以 $f(2T-x)=f(x)$，于是，令 $x=2T-t$，则

$$\int_{2T-b}^{T} f(x)dx = -\int_b^T f(2T-t)dt = \int_T^b f(2T-t)dt = \int_T^b f(t)dt = \int_T^b f(x)dx,$$

所以

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{2T-b} f(x)dx + 2\int_T^b f(x)dx。$$

从几何上说，由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称，所以积分 $\int_{2T-b}^{T} f(x)dx$ 与积分 $\int_T^b f(x)dx$ 表示的是相同的面积，从而上述等式成立。

13．设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0. \end{cases}$ 计算 $I=\int_1^4 f(x-2)dx$。

解 令 $t=x-2$，则

$$I=\int_{-1}^{2} f(t)dt=\int_{-1}^{0} f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt$$

$$=-\int_{-1}^{0}\frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1}+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}dt^2=\ln\frac{e+1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-4})\text{。}$$

14．设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $g(1)=5$， $\int_0^1 g(t)dt=2$， 证明 $f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$。

解 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xt+t^2)g(t)dt=\frac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)dt-x\int_0^x tg(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)dt$，

等式两边求导，得到

$$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt+\frac{1}{2}x^2 g(x)-(\int_0^x tg(t)dt+x^2 g(x))+\frac{1}{2}x^2 g(x)$$

$$=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt\text{。}$$

再求导，得到 $f''(x)=\int_0^x g(t)dt,\ f'''(x)=g(x)$，所以

$$f''(1)=2\text{，}\quad f'''(1)=5\text{。}$$

15．设 $(0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)dx$，求 $\int_1^e f(x)dx$。

解 记 $\int_1^e f(x)dx=a$，则 $f(x)=\ln x-a$，于是

$$a=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \ln xdx-a(e-1)\text{，}$$

所以

$$a=\frac{1}{e}\int_1^e \ln xdx=\frac{1}{e}\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=\frac{1}{e}\text{。}$$

16．设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^1 tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan(x^2)$，$f(1)=1$。求 $\int_1^2 f(x)dx$。

解 在 $\int_0^1 tf(2x-t)dt$ 中，令 $u=2x-t$，则

$$\int_0^1 tf(2x-t)dt = -\int_{2x}^{2x-1}(2x-u)f(u)du，$$

于是

$$2x\int_{2x-1}^{2x} f(u)du - \int_{2x-1}^{2x} uf(u)du = \frac{1}{2}\arctan(x^2)，$$

两边求导，得到

$$2\int_{2x-1}^{2x} f(u)du + 4x(f(2x)-f(2x-1)) - 2(2xf(2x)-(2x-1)f(2x-1)) = \frac{x}{1+x^4}，$$

将 $x=1, f(1)=1$ 代入上式，得到

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4}。$$

17．求 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$，其中 $n$ 为正整数。

解　首先有

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x\sin xdx = (4k+1)\pi，$$

$$\int_{)2k-1)\pi}^{2k\pi} x|\sin x|dx = -\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x\sin xdx = (4k-1)\pi。$$

当 $n=2m$ 时，

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x|\sin x|dx\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}[(4k+1)+(4k+3)\pi] = 4m^2\pi；$$

当 $n=2m+1$ 时，

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x|\sin x|dx\right) + \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} x|\sin x|dx$$

$$= 4m^2\pi + (4m+1)\pi = (2m+1)^2\pi。$$

所以

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = n^2\pi。$$

18．设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t|dt$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$。

**解** 设$n\pi < x \le (n+1)\pi$，$n$为正整数，则 $\frac{x}{n} \to \pi \ (x \to +\infty)$。由于

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n\int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2n \text{，} \quad 0 \le \int_{n\pi}^{x} |\cos x| dx \le \pi \text{，}$$

可知

$$\frac{2n}{x} \le \frac{S(x)}{x} \le \frac{2n+\pi}{x} \text{，}$$

所以

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi} \text{。}$$

19．设$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，且对于任何$a > 0$有

$$g(x) = \int_x^{ax} f(t)dt \equiv \text{常数，} \quad x \in (0,+\infty) \text{。}$$

证明：$f(x) = \frac{c}{x}$，$x \in (0,+\infty)$，其中$c$为常数。

**证** 在$g(x) = \int_x^{ax} f(t)dt$两边关于$x$求导，得到

$$g'(x) = af(ax) - f(x) \equiv 0 \text{。}$$

取$x = 1$，则$f(a) = \frac{f(1)}{a}$，此式对任何$a > 0$都成立。记$c = f(1)$，就得到

$$f(x) = \frac{c}{x} \text{，} \quad x \in (0,+\infty) \text{。}$$

20．设$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，证明

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = (\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{1}{x} dx \text{。}$$

**证** 令$t = \frac{4}{x}$，则 $x = \frac{4}{t}, dx = -\frac{4}{t^2}dt$，于是

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = \int_4^1 f\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right) \frac{t(\ln 4 - \ln t)}{4} (-\frac{4}{t^2})dt$$

$$= \int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln 4 - \ln x}{x} dx \text{，}$$

所以

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = (\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{1}{x} dx \text{。}$$

21．设 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx。$$

证　由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，可设 $|f(\xi)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|,\xi\in[a,b]$及

$|f(\eta)|=\min\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$， $\eta\in[a,b]$。于是

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(\xi)|-|f(\eta)|\le|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right|\le\int_a^b|f'(x)|dx。$$

另一方面，由积分中值定理，$\exists\varsigma\in[a,b]$，使 $f(\varsigma)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，于是

$$\min_{a\le x\le b}|f(x)|\le|f(\varsigma)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|。$$

所以

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|=\min_{a\le x\le b}|f(x)|+(\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|)\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx。$$

22．设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du。$$

证　利用分部积分法，

$$\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du=\left(u\int_0^u f(x)dx\right)\Big|_0^x-\int_0^x uf(u)du=\int_0^x f(u)(x-u)\,du。$$

注：本题也可令$F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du$，证明$F'(x)\equiv 0$。

23. 设 $f(x)$在$[0,a]$上二阶可导（$a>0$），且 $f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)dx\ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

证　将 $f(x)$在 $x=\dfrac{a}{2}$展开成 1 阶的 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a}{2})^2，\ (0<\xi<a)。$$

由 $f''(x)\ge 0$，得到

$$f(x)\ge f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})\text{。}$$

对上述不等式两边从$0$到$a$积分，由于$\int_0^a (x-\frac{a}{2})dx=0$，就得到

$$\int_0^a f(x)dx\ge af\left(\frac{a}{2}\right)\text{。}$$

24. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f''(x)\le 0$， $x\in[0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)dx\le f\left(\frac{1}{3}\right)\text{。}$$

**证** 将$f(x)$在$x=\frac{1}{3}$展开成 1 阶的 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{1}{3})^2\text{，}\quad(0<\xi<1)\text{。}$$

由 $f''(x)\le 0$，得到$f(x)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})$， $x\in[0,1]$，再用$x^2$替换$x$，即得到

$$f(x^2)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3})\text{。}$$

对上述不等式两边从$0$到$1$积分，由于$\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})dx=0$，就得到

$$\int_0^1 f(x^2)dx\le f\left(\frac{1}{3}\right)\text{。}$$

25．设$f(x)$为$[0,2\pi]$上的单调减少函数，证明：对任何正整数$n$成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx\ge 0\text{。}$$

**证** $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx+\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx\right)$，

在$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx$与$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx$中，分别令$x=\frac{2k\pi+t}{n}$与$x=\frac{(2k+1)\pi+t}{n}$，得到

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{2k\pi+t}{n})\sin tdt\text{，}$$

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx=-\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{(2k+1)\pi+t}{n})\sin tdt\text{。}$$

由于$f(x)$在$[0,2\pi]$上单调减少， $\sin t$在$[0,\pi]$上非负，所以

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)-f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right)\sin t dt\ge 0。$$

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0$，$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=0$。证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 $\xi_1$，$\xi_2$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

证 证明一： 设 $g(x)=\int_0^x f(t)dt,$，$h(x)=\int_0^x g(x)\sin x dx$，则

$$g(0)=g(\pi)=0，$$

$$h(0)=0，\quad h(\pi)=\int_0^{\pi} g(x)\sin x dx=-\int_0^{\pi} g(x)d\cos x$$

$$=-g(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=0，$$

对 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上应用 Rolle 定理，可知存在 $\eta\in(0,\pi)$，使得 $h'(\eta)=g(\eta)\sin\eta=0$，即 $g(\eta)=0$，再在 $[0,\eta]$ 和 $[\eta,\pi]$ 上对 $g(x)$ 分别运用 Rolle 定理，可知 $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$，使得

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0。$$

证明二：用反证法。若不然，只有一个点 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi)=0$，由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $(0,\xi)$ 和 $(\xi,\pi)$ 上异号，不妨设在 $(0,\xi)$ 中 $f(x)<0$，在 $(\xi,\pi)$ 中 $f(x)>0$。

设 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $g(0)=g(\pi)=0,\ g'(x)=f(x)$，可知 $g(x)$ 在 $(0,\xi)$ 中单调减少，而在 $(\xi,\pi)$ 中单调增加，从而 $g(x)\le 0, x\in[0,\pi]$。

另一方面，$g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上不恒等于零（否则 $f(x)$ 恒为零与反证法假设矛盾），于是

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=\int_0^{\pi}\cos x dg(x)=g(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} g(x)\sin x dx=\int_0^{\pi} g(x)\sin x dx<0，$$

与题设矛盾。

# 习　题 7.4

1. 求下列曲线所围的图形面积：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$， $y=x$ ， $x=2$ ；

(2) $y^2=4(x+1)$， $y^2=4(1-x)$ ；

(3) $y=x$ ， $y=x+\sin^2 x$， $x=0$， $x=\pi$ ；

(4) $y=\mathrm{e}^x$， $y=\mathrm{e}^{-x}$， $x=1$ ；

(5) $y=|\ln x|$， $y=0$， $x=0.1$， $x=10$ ；

(6) 叶形线$\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3, \end{cases}$ $0\le t\le 2$ ；

(7) 星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ ；

(8) 阿基米德螺线$r=a\theta,\ \theta=0,\ \theta=2\pi$ ；

(9) 对数螺线$r=a\,\mathrm{e}^{\theta},\ \theta=0,\ \theta=2\pi$ ；

(10) 蚌线$r=a\cos\theta+b$ （$b\ge a>0$）；

(11) $r=3\cos\theta$， $r=1+\cos\theta$ $(-\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3})$；

(12) 双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$ ；

(13) 四叶玫瑰线$r=a\cos 2\theta$。

(14) Descartes 叶形线$x^3+y^3=3axy$ ；

(15) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解 (1) 面积$A=\int_1^2(x-\dfrac{1}{x})dx=(\dfrac{1}{2}x^2-\ln x)\Big|_1^2=\dfrac{3}{2}-\ln 2$。

(2) 面积$A=2\int_0^2\left((1-\dfrac{y^2}{4})-(\dfrac{y^2}{4}-1)\right)dy=2\int_0^2(2-\dfrac{y^2}{2})dy=\dfrac{16}{3}$。

(3) 面积$A=\int_0^\pi\sin^2 x dx=\dfrac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx=\dfrac{\pi}{2}$。

（4）面积 $A=\int_0^1 (e^x-e^{-x})dx = e+\frac{1}{e}-2$。

（5）面积 $A=\int_{0.1}^{10}|\ln x|dx=\int_1^{10}\ \ln xdx-\int_{0.1}^{1}\ln xdx = x(\ln x-1)\Big|_1^{10}-x(\ln x-1)\Big|_{0.1}^{1}$

$=\frac{99}{10}\ln 10-\frac{81}{10}$。

（6）面积 $A=\left|\int_0^2 (2t^2-t^3)(2-2t)dt\right| = 2\left|\int_0^2 (2t^2-3t^3+t^4)dt\right| = \frac{8}{15}$。

（7）面积 $A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos tdt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t-\cos^6 t)dt$

$=12a^2\left(\frac{3}{16}\pi-\frac{15}{96}\pi\right)=\frac{3}{8}\pi a^2$。

（8）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\theta^2 d\theta = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$。

（9）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\left(e^{4\pi}-1\right)a^2$。

（10）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta+b)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta+b^2)d\theta$

$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta+b^2\pi = \frac{1}{2}\pi a^2+\pi b^2$。

（11）面积

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[(3\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)^2]d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(3+4\cos 2\theta-2\cos\theta)d\theta = \pi$$。

（12）面积 $A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = a^2$。

（13）面积 $A=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\theta d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)d\theta = \frac{1}{2}\pi a^2$。

（14）解一：令 $y=tx$，则 $x=\frac{3at}{1+t^3}$， $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$， $t:0\to+\infty$。

于是面积

$$A=\left|\int_0^{+\infty}\frac{3at^2}{1+t^3}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)' dt\right| = 9a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt\right|$$，

令 $u=t^3$，则

$$A=3a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{(1-2u)}{(1+u)^3}du\right|=3a^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{(1+u)^2}-\frac{3}{(1+u)^3}\right)du=\frac{3}{2}a^2。$$

解二： 将 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 代入 $x^3+y^3=3axy$ 中，得到

$$r=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}，\quad \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]，$$

于是面积

$$A=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta}{(\tan^3\theta+1)^2}d\tan\theta$$

$$=-\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{\tan^3\theta+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a^2。$$

（15）将 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 代入 $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ 中，得到

$$r^2=\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}，$$

于是面积

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^4\theta+1}d\tan\theta，$$

令 $t=\tan\theta$，则

$$A=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{d(t-t^{-1})}{(t-t^{-1})^2+2}=\sqrt{2}a^2\arctan\frac{t-t^{-1}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{2}\pi a^2。$$

2. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值。

解 选取焦点 $(a,0)$ 为极点，$x$ 轴为极轴，建立极坐标。 则由 $x=r\cos\theta+a, y=r\sin\theta$ 代入抛物线的方程 $y^2=4ax$ 中，可得抛物线的极坐标方程为

$$r=\frac{2a}{1-\cos\theta}。$$

设过焦点的弦的极角为 $\alpha$，则它与抛物线所围的面积为

$$A(\alpha)=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+\pi}\frac{4a^2}{(1-\cos\theta)^2}d\theta。$$

由

$$A'(\alpha)=2a^2\left(\frac{1}{(1+\cos\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}\right)=-\frac{8a^2\cos\alpha}{\sin^4\alpha}，$$

令 $A'(\alpha)=0$，得到 $\alpha=\frac{\pi}{2}$。由于当 $\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$A'(\alpha)<0$；当 $\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，$A'(\alpha)>0$，所以 $A(\alpha)$ 在 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 取到极小值，也就是最小值 $A(\frac{\pi}{2})$：

$$A(\frac{\pi}{2})=2a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}d\theta=-a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(1+\cot^2\frac{\theta}{2})d\cot\frac{\theta}{2}=\frac{10}{3}\sqrt{2}a^2。$$

3. 求下列曲线的弧长：

(1) $y=x^{3/2}$， $0\le x\le 4$；

(2) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}$， $1\le y\le \mathrm{e}$；

(3) $y=\ln\cos x$， $0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$；

(4) 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$；

(5) 圆的渐开线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$；

(6) 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$， $0\le\theta\le 2\pi$；

(7) 阿基米德螺线 $r=a\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$；

(8) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$， $0\le\theta\le 3\pi$。

解 (1) $L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{80\sqrt{10}-8}{27}$。

(2) $L=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}(y-y^{-1})^2}dy=\int_1^e\frac{1}{2}(y+y^{-1})dy=\frac{e^2+1}{4}$。

(3) $L=\int_0^a\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^a\sec xdx=\ln(\tan a+\sec a)$。

(4) $L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos tdx=6a$。

(5) 由 $x'(t)=at\cos t, y'(t)=at\sin t$，可得

$$L=\int_0^{2\pi} at dt=2\pi^2 a。$$

(6) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8a$。

(7) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}d\theta=\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$。

(8) $L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=\frac{3}{2}\pi a$。

4. 在旋轮线的第一拱上，求分该拱的长度为 1:3 的点的坐标。

解 设所求点所对应的参数为$\alpha$，则

$$L_1=\int_0^{\alpha}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=4a(1-\cos\frac{\alpha}{2}),$$

$$L_2=\int_{\alpha}^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=4a(1+\cos\frac{\alpha}{2}),$$

由$L_2=3L_1$，得$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，即$\alpha=\frac{2}{3}\pi$，所以该点的坐标为$((\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2})a,\frac{3a}{2})$。

5. 求下列几何体的体积：

(1) 正椭圆台：上底是长半轴为$a$、短半轴为$b$的椭圆，下底是长半轴为$A$、短半轴为$B$的椭圆（$A>a,B>b$），高为$h$；

(2) 椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

(3) 直圆柱面$x^2+y^2=a^2$和$x^2+z^2=a^2$所围的几何体；

(4) 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$和直圆柱面$x^2+y^2=ax$所围的几何体。

解 (1) $V=\int_0^h\pi(a+\frac{A-a}{h}x)(b+\frac{B-b}{h}x)dx=\frac{\pi h}{6}(2AB+2ab+Ab+aB)$。

(2) $V=\int_{-c}^{c}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{3}\pi abc$。

(3) 用平行于$0yz$平面的平面去截这立体的第一卦限的部分，截面为正方形，于是

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{16}{3}a^3。$$

(4) 用平行于$0yz$平面的平面去截这立体，则截面积为

$$A(x)=2\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy=2\sqrt{ax-x^2}\sqrt{a^2-ax}+2(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}。$$

由

$$\int_0^a(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx=\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}d(a^2x-\frac{1}{3}x^3)$$

$$=(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\Bigg|_0^a-\int_0^a(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}(a+x)}dx=(\frac{\pi}{3}-\frac{32}{45})a^3,$$

及

$$\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\sqrt{a^2-ax}dx=\sqrt{a}\int_0^a\sqrt{x}(a-x)dx=\frac{4}{15}a^3,$$

得到

$$V=(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9})a^3。$$

6. 证明以下旋转体的体积公式：

⑴ 设 $f(x)\geq 0$ 是连续函数，由 $0\leq a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)$ 所表示的区域绕 $y$ 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx；$$

⑵ 在极坐标下，由 $0\leq\alpha\leq\theta\leq\beta\leq\pi,\ 0\leq r\leq r(\theta)$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta。$$

证（1）作区间 $[a,b]$ 的划分 $P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则关于小区域 $\{(x,y)|x_{i-1}\leq x\leq x_i,\ 0\leq y\leq f(x)\}$ 绕 $y$ 轴旋转所得的体积有

$$\Delta V_i\approx\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)f(x_i)\approx 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i。$$

设 $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}(\Delta x_i)$，令 $\lambda\to 0$，就有

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx。$$

(2) 解一： 设$x=r(\theta)\cos\theta$， $y=r(\theta)\sin\theta$， $a=r(\alpha)\cos\alpha$， $b=r(\beta)\cos\beta$，则

$$\begin{aligned}V&=\int_b^a \pi y^2dx-\frac{1}{3}\pi a r^2(\alpha)\sin^2\alpha+\frac{1}{3}\pi b r^2(\beta)\sin^2\beta\\&=\int_b^a \pi y^2dx+\frac{1}{3}\pi\int_a^b d(y^2x)=\int_\beta^\alpha \pi r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta\\&+\frac{1}{3}\pi\int_\alpha^\beta\left(3r^2r'\sin^2\theta\cos\theta+2r^3\sin\theta\cos^2\theta-r^3\sin^3\theta\right)d\theta\\&=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta\text{。}\end{aligned}$$

解二： 首先，由$0\le\theta\le\beta\le\pi,0\le r\le a$所表示的扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\frac{\pi}{3}a^2\sin^2\beta a\cos\beta+\pi\int_{a\cos\beta}^a(a^2-x^2)dx=\frac{2\pi}{3}(1-\cos\beta)a^3\text{。}$$

然后作$[\alpha,\beta]$的划分：$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n=\beta$，考察由$\theta_{i-1}\le\theta\le\theta_i,\ 0\le r\le r(\theta)$所表示的小曲边扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积，这小区域可近似看作扇形，于是这小块的体积应近似等于

$$\Delta V_i\approx\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)(1-\cos\theta_i)-\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)(1-\cos\theta_{i-1})\approx\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)\cdot\sin\theta_i\Delta\theta_i\text{，}$$

从而

$$V\approx\sum_{i=1}^n\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)\sin\theta_i\Delta\theta_i\text{。}$$

令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta\theta_i)\to0$，就有

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta\text{。}$$

7. 求下列曲线绕指定轴旋转一周所围成的旋转体的体积：

（1） $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕$x$轴；

（2） $y=\sin x$， $y=0$， $0\le x\le\pi$，

① 绕$x$轴， ② 绕$y$轴；

（3） 星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$，绕$x$轴；

（4） 旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$， $y = 0$，

① 绕$y$轴， ② 绕直线$y = 2a$；

（5） $x^2 + (y-b)^2 = a^2$，（$0 < a \le b$），绕$x$轴；

（6） 心脏线$r = a(1 - \cos\theta)$，绕极轴；

（7） 对数螺线$r = a\,\mathrm{e}^{\theta}, 0 \le \theta \le \pi$，绕极轴；

（8） $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$，绕$x$轴。

解（1） $V = \pi\int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi ab^2$。

（2） ①$V = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\pi^2$；

②$V = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x dx = 2\pi^2$。

（3） $V = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx = 3\pi a^3\int_0^{\pi} \sin^7 t\cos^2 t dt$

$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t)dt = \frac{32}{105}\pi a^3$。

（4） ①$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx = 2\pi a^3\int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = 6\pi^2 a^3$；

②$V = \pi(2a)^3 - \pi\int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t)dt = 7\pi^2 a^3$。

（5） $V = \pi\int_{-a}^{a} \left((b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2\right)dx = 4\pi b\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx = 2\pi^2 a^2 b$。

（6）由第 6 题（2），得

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3(1 - \cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\pi a^3。$$

（7） $V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3 e^{3\theta} \sin\theta d\theta = \frac{\pi}{15}(e^{3\pi} + 1)a^3$。

（8） $V = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \sin\theta d\theta$，令$t = \cos\theta$，则

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt\text{。}$$

由

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=t(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}-6\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}t^2(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=1-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt\text{，}$$

得到

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}t\sqrt{2t^2-1}-\ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\frac{3\sqrt{2}}{16}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{8}\text{，}$$

所以

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right]a^3\text{。}$$

8. 将抛物线 $y=x(x-a)$ 在 $x\in[0,a]$ 和 $x\in[a,c]$ 的弧段分别绕 $x$ 轴旋转一周后，所得到旋转体的体积相等，求 $c$ 与 $a$ 的关系。

解 $$\pi\int_0^a x^2(x-a)^2dx=\pi\int_a^c x^2(x-a)^2dx\text{，}$$

积分后化简，得到

$$2a^5-10a^2c^3+15ac^4-6c^5=0\text{。}$$

9. 记 $V(\xi)$ 是曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 在 $x\in[0,\xi]$ 的弧段绕 $x$ 轴旋转一周所围成的旋转体的体积，求常数 $a$ 使得满足

$$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)\text{。}$$

解　由

$$V(a)=\pi\int_0^a\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi a^2}{2(1+a^2)}，$$

可知 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2}$，于是得到 $\frac{a^2}{1+a^2}=\frac{1}{2}$，解得 $a=1$。

10．将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 $x$ 轴旋转一周围成一个旋转椭球体，再沿 $x$ 轴方向用半径为 $r$（$r<b$）的钻头打一个穿心的圆孔，剩下的体积恰为原来椭球体体积的一半，求 $r$ 的值。

解　椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 $x$ 轴旋转一周所围成的旋转椭球体的体积为

$$V_1=2\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx=\frac{4}{3}\pi ab^2。$$

割下部分的体积为

$$V_2=2\pi r^2\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}+2\pi\int_{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}}^a b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4\pi}{3}\left(ab^2-\frac{a}{b}(b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)。$$

由 $V_1=2V_2$，解得 $r=b\sqrt{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$。

11．设直线 $y=ax$（$0<a<1$）与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形的面积为 $S_1$，且它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 $S_2$。

（1）确定 $a$ 的值，使得 $S_1+S_2$ 达到最小，并求出最小值；

（2）该最小值所对应的平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解（1）$S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)dx+\int_a^1(x^2-ax)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$。

记 $f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$，则 $f'(a)=a^2-\frac{1}{2},f''(a)=2a$。令 $f'(a)=0$，得到 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，且 $f''(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}>0$。所以 $S_1+S_2$ 在 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处取到最小值：

$$\min\{S_1+S_2\}=f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})。$$

（2）旋转体体积

$$V=\pi\int_0^a[(ax)^2-x^4]dx+\pi\int_a^1[x^4-(ax)^2]dx=(\frac{4}{15}a^5-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{5})\pi。$$

将 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 代入，就得到

$$V=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi。$$

12. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上大于零，并满足

$$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2 \quad（a\text{为常数}）。$$

进一步，假设曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围的图形 $S$ 的面积为 2。

（1）求函数 $f(x)$；

（2）当 $a$ 为何值时，图形 $S$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积最小？

解（1）由 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$，可得 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{3a}{2}$，所以 $\frac{f(x)}{x}=\frac{3a}{2}x+c$，即

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+cx。$$

对 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 两边关于 $x$ 积分，有 $\int_0^1 xdf(x)=\int_0^1 f(x)dx+\frac{a}{2}$，由此可得 $f(1)=4+\frac{a}{2}$，从而 $c=4-a$，于是

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x。$$

（2）
$$V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{\pi}{30}(a^2+10a+160)。$$

令 $V'=0$，得 $a=-5$，且这时 $V''=\frac{\pi}{15}>0$，所以在 $a=-5$ 时旋转体的体积取到最小值。

13．求下列旋转曲面的面积：

⑴ $y^2=2px$，$0\le x\le a$，绕 $x$ 轴；

⑵ $y=\sin x$，$0\le x\le \pi$，绕 $x$ 轴；

⑶ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 $x$ 轴；

⑷ 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le \pi$，绕 $x$ 轴；

⑸ 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$，绕极轴；

⑹ 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$，

(i)绕极轴，(ii) 绕射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$。

解（1）面积 $A=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}dx$

$$=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right]。$$

（2）面积 $A=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$

$$=-\pi\left(\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}+\ln(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x})\right)\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2}\pi+2\pi\ln(\sqrt{2}+1)。$$

（3）面积

$$A=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+(\frac{b}{a}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}})^2}dx=\frac{4b}{a^2}\pi\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}dx$$

$$=\begin{cases}2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a} & a<b\\ 4\pi ab & a=b\\ 2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} & a>b\end{cases}。$$

（4）面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos tdt=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 td\sin t=\frac{12}{5}\pi a^2$。

（5）面积 $A=2\pi\int_0^{\pi}r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4a^2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta$

$$=16a^2\pi\int_0^{\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{32}{5}\pi a^2。$$

（6）(i) 面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=(4-2\sqrt{2})\pi a^2$；

(ii) 面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}\pi a^2$。

14．设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由该曲线、所作切线及 $x$ 轴所围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的表面积。

解　由 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$，可设曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 过点 $(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{2y_0}(x-x_0)，$$

而此切线过原点，由此可得 $x_0=2,y_0=1$，于是切线方程为

$$y=\frac{1}{2}x。$$

旋转体的表面积

$$A=2\pi\int_0^2\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx+2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^2 xdx+\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)。$$

15．证明由空间曲线

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), \quad t\in[T_1,T_2]\\ z=z(t),\end{cases}$$

垂直投影到 O$xy$ 平面所形成的柱面的面积公式为

$$S=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\ ，$$

这里假设 $x'(t)$， $y'(t)$， $z'(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上连续，且 $z(t)\ge 0$。

**证** 作 $[T_1,T_2]$ 的划分：$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T_2$，设空间曲线对应于小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 的小弧段在 O$xy$ 平面的投影的长度为 $\Delta s_i$，则

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\ ，$$

其中 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$。于是这段小弧段垂直投影到 O$xy$ 平面所形成的柱面的面积为

$$\Delta S_i\approx z(\xi_i)\Delta s_i=z(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i。$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta t_i)$，就得到

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}z(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt\ 。$$

16．求下列曲线在指定点的曲率和曲率半径。

（1） $xy=4$，在点 $(2,2)$ ；

（2） $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ （$a>0$），在 $t=\pi/2$ 对应的点。

**解**（1） $y'=-\dfrac{4}{x^2},y''=\dfrac{8}{x^3}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}, R=2\sqrt{2}\text{。}$$

（2） $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4a}, R=2\sqrt{2}a\text{。}$$

17．求下列曲线的曲率和曲率半径。

（1） 抛物线 $y^2=2px$ （$p>0$）；

（2） 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ；

（3） 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ （$a>0$）；

（4） 圆的渐开线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ （$a>0$）。

解（1） $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{p}, \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{p}$，于是

$$K=\frac{\frac{1}{p}}{[1+(\frac{y}{p})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}，\quad R=\frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}\text{。}$$

（2） 令 $x=a\sec t, y=b\tan t$ ，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}=\frac{b}{a}\csc t, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{-\cot t\csc t}{\tan t\sec t}=-\frac{b}{a^2}\cot^3 t\text{，}$$

于是

$$K=\frac{\frac{b}{a^2}|\cot t|^3}{[1+(\frac{b}{a}\csc t)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab|\cot t|^3}{(a^2+b^2\csc^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^4b}{[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{3}{2}}}\text{，}$$

$$R=\frac{[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{3}{2}}}{a^4b}\text{。}$$

（3） 令 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ ，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{\sin t\cos^4 t},$$

于是

$$K=\frac{\frac{1}{3a}\left|\frac{1}{\sin t\cos^4 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3a}\frac{1}{|\sin t\cos t|}=\frac{1}{3\sqrt[3]{|axy|}},\quad R=3\sqrt[3]{|axy|}。$$

（4） $\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sec^2 t}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3 t}$，

于是

$$K=\frac{\left|\frac{1}{at\cos^3 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{at},\quad R=at。$$

18．求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率圆方程。

**解**　$y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$，所以曲线在点 $(1,0)$ 处的曲率为

$$K=\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \text{曲率半径为}\quad R=2\sqrt{2}。$$

由于曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 $y'=1$，所以法线方程为 $y=-x+1$，设 $(a,b)$ 为曲率圆的圆心，则 $b=-a+1$。

再由 $(a-1)^2+(b-0)^2=8$，解得 $a=3,b=-2$，所以曲率圆的方程为

$$(x-3)^2+(y+2)^2=8。$$

19．设曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]\,(\subset[0,2\pi])$，且 $r(\theta)$ 二阶可导。证明它在点 $(r,\theta)$ 处的曲率为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

**证**　设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，则其曲率为

$$K=\frac{|y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}。$$

由 $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$，可得

$$x'=r'\cos\theta-r\sin\theta, y'=r'\sin\theta+r\cos\theta，$$

$$x''=r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta, y''=r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta，$$

于是

$$(x')^2+(y')^2=r^2+r'^2，\quad y''x'-y'x''=r^2+2r'^2-rr''，$$

所以

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}。$$

# 习　题　7.5

1. 一根 10m 长的轴，密度分布为 $\rho(x)=(0.3x+6)$ kg/m（$0\le x\le 10$），求轴的质量。

解　$m=\int_0^{10}(0.3x+6)dx=75$　（kg），即轴的质量为 75kg。

2. 已知抛物线状电缆 $y=x^2$　（$-1\le x\le 1$）上的任一点处的电荷线密度与该点到 $y$ 轴的距离成正比，在 $(1,1)$ 处的密度为 q，求此电缆上的总电量。

解　$Q=q\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1+4x^2}dx=q\frac{1}{6}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)q$，即此电缆上的总电量为 $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)q$。

3. 水库的闸门是一个等腰梯形，上底 36m，下底 24m，高 16m，水平面距上底 4m，求闸门所受到的水压力(水的密度为 1000kg/m$^3$)。

解　以梯形的上底为 $y$ 轴，从上底的中点垂直向下为 $x$ 轴正向，则水下离水面距离为 $x$ 处，高度为 $dx$ 的一段闸门一侧所受的水压力为

$$dF=1000g(4+x)\left[24+\frac{3}{4}(16-x)\right]dx,$$

于是闸门所受的总的水压力为

$$F=1000g\int_0^{16}(4+x)\left[24+\frac{3}{4}(16-x)\right]dx\approx 5.4\times 10^7\ \text{(N)}。$$

4. 一个弹簧满足圆柱螺线方程

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=a\sin t, \quad t>0 \\ z=bt, \end{cases}\quad (a>0,b>0),$$

其上任一点处的密度与它到 O$xy$ 平面的距离成正比，试求其第一

圈的质量。

解　质量 $m=\int_0^{2\pi} kbt\sqrt{a^2+b^2}dt=2kb\sqrt{a^2+b^2}\pi^2$。

5.　一个圆柱形水池半径 10m，高 30m，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。

解　$W=\int_{15}^{30} x\cdot 10^3 g\cdot\pi 10^2 dx=1.04\times 10^9$ (J)。

6.　半径为 $r$ 的球恰好没于水中，球的密度为 $\rho$，现在要将球吊出水面，最少要做多少功？

解　考虑对水下离水面距离为 $x$ 处，厚度为 $dx$ 的圆形薄片的做功情况：半径为 $r$ 的球恰好离开水面，则圆形薄片的位移恰为 $2r$，其在水中移动的距离为 $x$，在水上移动的距离为 $2r-x$。薄片的面积为 $(2rx-x^2)\pi$，设 $\rho_0$ 为水的密度，则将球恰好吊出水面至少要做的功为

$$W=\rho g\pi\int_0^{2r}(2r-x)(2rx-x^2)dx+(\rho-\rho_0)g\pi\int_0^{2r}x(2rx-x^2)dx$$
$$=\frac{4}{3}\pi r^4 g(2\rho-\rho_0)\text{。}$$

7.　半径为 $r$ 密度为 $\rho$ 的球壳以角速度 $\omega$ 绕其直径旋转，求它的动能。

解　$$W=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{\omega^2}{2}\int_0^{2r}\rho(2rx-x^2)2\pi\sqrt{2rx-x^2}\sqrt{1+y'^2}dx$$
$$=\frac{\omega^2}{2}\int_0^{2r}\rho(2rx-x^2)2\pi\sqrt{2rx-x^2}\frac{r}{\sqrt{2rx-x^2}}dx$$
$$=\rho\omega^2 r\pi\int_0^{2r}(2rx-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi\rho\omega^2 r^4\text{。}$$

8.　使某个自由长度为 1m 的弹簧伸长 2.5cm 需费力 15N，现将它从 1.1m 拉至 1.2m，问要做多少功？

解　由 $F=kx$，当 $x=0.025$m 时，$F=15$N，代入得 $k=600$。于是所做的功为

$$W=\int_{0.1}^{0.2}kxdx=9\,\text{J}。$$

9. 一物体的运动规律为 $s=3t^3-t$，介质的阻力与速度的平方成正比，求物体从 $t=1$ 运动至 $t=T$ 时阻力所做的功。

解 设介质的阻力为 $F$，速度 $v=s'=9t^2-1$，则 $F=k(9t^2-1)^2$。于是

$$W=\int_1^T Fs'dt=\int_1^T(9t^2-1)^3dt=\frac{729}{7}T^7-\frac{243}{5}T^5+9T^3-T-\frac{2224}{35}。$$

10. 半径为 1m，高为 2m 的直立的圆柱形容器中充满水，拔去底部的一个半径为 1cm 的塞子后水开始流出，试导出水面高度 $h$ 随时间变化的规律，并求水完全流空所需的时间。（水面比出水口高 $h$ 时，出水速度 $v=0.6\times\sqrt{2gh}$。）

解 设 $t$ 时刻水面的高度为 $h$，过了 $dt$ 时间后水面的高度降低了 $dh$，则

$$\pi 1^2dh=-\pi(0.01)^2vdt=-\pi(0.01)^2\times 0.6\sqrt{2gh}dt，$$

即

$$\frac{dh}{\sqrt{h}}=-6\times10^{-5}\sqrt{2g}dt。$$

对上式两边积分，注意 $t=0$ 时，$h=2$，得到

$$h=2(1-3\times10^{-5}\sqrt{g}t)^2，$$

以 $h=0$ 代入，解得

$$t=\frac{10^5}{3\sqrt{g}}=1.06\times10^4\ \text{（s）}。$$

11. 上题中的圆柱形容器改为何种旋转体容器，才能使水流出时水面高度下降是匀速的。

解 根据题意，只要在上题的第一个等式的左边含有因子 $\sqrt{h}$ 即可，也即在时刻 $t$ 水面的半径 $r$ 须满足 $r^2=k\sqrt{h}$，其中 $k$ 为常数。所以可选用

曲线 $y=cx^4$ 绕 $y$ 轴旋转一周后所得旋转曲面作为容器，从而使得水流出时水面高度下降是匀速的。

12. 镭的衰变速度与它的现存量成正比，设 $t_0$ 时有镭 $Q_0$ g，经 1600 年它的量减少了一半，求镭的衰变规律。

解　设在时刻 $t$ 镭的现存量为 $Q=Q(t)$，则

$$\frac{dQ}{dt}=-kQ\text{，}$$

对等式两边积分，注意在时刻 $t_0$ 有镭 $Q_0$ g，得到

$$Q(t)=Q_0e^{-k(t=t_0)}\text{。}$$

由题意，当 $t-t_0=1600$ 时，$Q(t)=\frac{Q_0}{2}$，代入上式，得到 $k=\frac{\ln 2}{1600}$，所以

$$Q=Q_0 2^{-\frac{t-t_0}{1600}}\text{。}$$

13. 将 A 物质转化为 B 物质的化学反应速度与 B 物质的浓度成反比，设反应开始时有 B 物质 20%，半小时后有 B 物质 25%，求 B 物质的浓度的变化规律。

解　设在时刻 $t$，$B$ 物质的浓度为 $y(t)$，则

$$\frac{dy}{dt}=\frac{k}{y}\text{，}$$

解得

$$y=\sqrt{2kt+c}\text{。}$$

因为 $y(0)=\frac{1}{5}$，$y(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，所以 $c=\frac{1}{25}, k=\frac{9}{400}$，于是得到

$$y=\frac{\sqrt{18t+16}}{20}\text{。}$$

14. 设 $[t,t+dt]$ 中的人口增长量与 $p_{\max}-p(t)$ 成正比，试导出相应的人口模型，画出人口变化情况的草图并与 Malthus 和 Verhulst 人口模

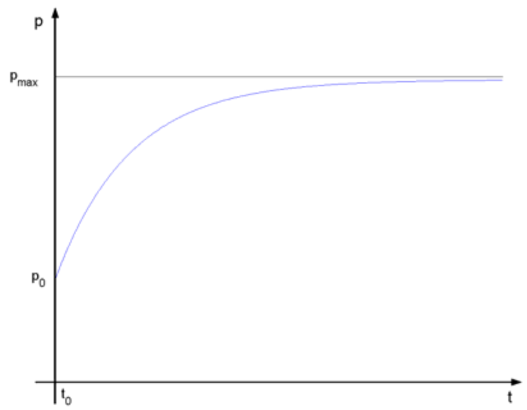
型加以比较。

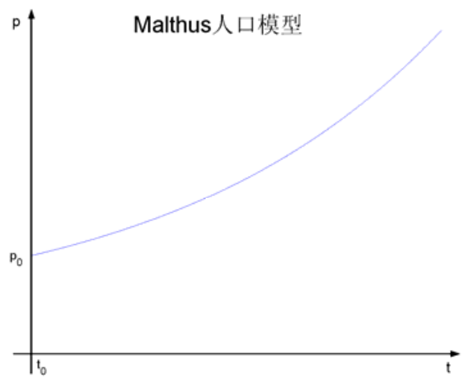
解　由题意可知

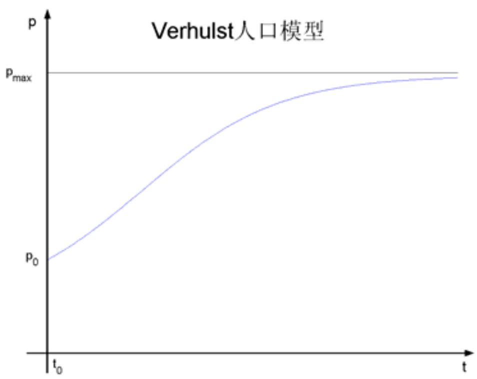
$$\frac{dp(t)}{dt}=k(p_{\max}-p(t))，\quad p(t_0)=p_0，$$

由此可解得

$$p(t)=p_{\max}-(p_{\max}-p_0)e^{-k(t-t_0)}。$$




15.　核反应堆中，$t$ 时刻中子的增加速度与当时的数量 $N(t)$ 成正比。设 $N(0)=N_0$，证明

$$\left[\frac{N(t_2)}{N_0}\right]^{t_1}=\left[\frac{N(t_1)}{N_0}\right]^{t_2}。$$

证　由题意可知

$$\frac{dN}{dt}=kN，$$

对等式两边积分，再注意 $N(0)=N_0$，可解得

$$N(t)=N_0e^{kt}，$$

由此即可得到

$$\left(\frac{N(t_2)}{N_0}\right)^{t_1}=e^{kt_1t_2}=\left(\frac{N(t_1)}{N_0}\right)^{t_2}。$$

16. 一个 1000m$^3$的大厅中的空气内含有$a$ %的废气，现以 1m$^3$／min 注入新鲜空气，混合后的空气又以同样的速率排出，求$t$时刻空气内含有的废气浓度，并求使废气浓度减少一半所需的时间。

解　设在时刻$t$空气内含有的废气浓度为$y(t)$，则

$$dy=-\frac{1}{1000}y(t)dt，\quad y(0)=\frac{a}{100}，$$

解此方程，即得到

$$y(t)=\frac{a}{100}e^{-\frac{t}{1000}}。$$

当$y(t)=\dfrac{a}{200}$时，有 $e^{\frac{t}{1000}}=2$，从而得到 $t=1000\ln 2$ （min），即废气浓度减少一半所需的时间为 $1000\ln 2$ （min）。

# 第八章　反常积分

## 习　题　8.1 反常积分的概念和计算

1.　物理学中称电场力将单位正电荷从电场中某点移至无穷远处所做的功为电场在该点处的电位。一个带电量 $+q$ 的点电荷产生的电场对距离 $r$ 处的单位正电荷的电场力为 $F=k\dfrac{q}{r^2}$ （$k$ 为常数），求距电场中心 $x$ 处的电位。

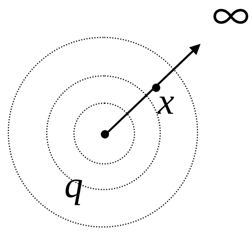


图 8.1.4

**解**　$U=\int_x^{+\infty}k\dfrac{q}{r^2}dr=\dfrac{kq}{x}$。

2.　证明：若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，$k_1$ 和 $k_2$ 为常数，则 $\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx=k_1\int_a^{+\infty}f(x)dx+k_2\int_a^{+\infty}g(x)dx。$$

**证**　设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^{A}f(x)dx$， $\int_a^{+\infty}g(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^{A}g(x)dx$，则

$$\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx$$

$$=k_1\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A}f(x)dx+k_2\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A}g(x)dx=k_1\int_a^{+\infty}f(x)dx+k_2\int_a^{+\infty}g(x)dx。$$

3.　计算下列无穷区间的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx$；　　(2) $\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x+1}dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ $(a>0,b>0)$；

(5) $\int_0^{+\infty}xe^{ax^2}dx$　$(a\in\mathbf{R})$；　　(6) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}dx$　$(p\in\mathbf{R})$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx$； (8) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}dx$；

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$ ； (10) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$。

**解**（1）$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}e^{-2x}d\cos 5x=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos 5xdx$

$$=\frac{1}{5}-\frac{2}{25}\int_0^{+\infty}e^{-2x}d\sin 5x=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx，$$

所以

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx=\frac{5}{29}。$$

（2）$\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3x}d\sin 2x=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3x}\sin 2xdx$

$$=-\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}e^{-3x}d\cos 2x=\frac{3}{4}-\frac{9}{4}\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx，$$

所以

$$\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{3}{13}。$$

（3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}。$$

（4）当 $a\neq b$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2a}-\frac{\pi}{2b}\right)=\frac{\pi}{2ab(a+b)}；$$

当 $a=b$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2a^3}+\frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}xd\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{\pi}{4a^3}=\frac{\pi}{4a^3}，$$

此结果等于在 $a \neq b$ 时的结果中以 $b = a$ 代入后的结果。

（5）当 $a \geq 0$ 时积分发散；当 $a < 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{ax^2}\, dx = \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax^2}\, d(ax^2) = -\frac{1}{2a}。$$

（6）当 $p \leq 1$ 时积分发散；当 $p > 1$ 时，

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x} dx = \frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{p-1}(\ln 2)^{-p+1}。$$

（7）令 $x = \tan t$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2。$$

（8）令 $e^x = t$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{tdt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2(1+t^2)}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}。$$

（9）利用第六章第 3 节习题 1(10)的结果

$$\int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1) + C，$$

即可得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

（10）$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$,

对等式右端任一积分（例如第二个积分）作变量代换 $x = \frac{1}{t}$，则

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt，$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0。$$

4. 计算下列无界函数的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ；　　(2) $\int_1^{e} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$ ；

(3) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$ ；　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$ ；

(5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ ；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx$；

解（1） $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = (-\sqrt{1-x^2})\Big|_0^1 = 1$。

（2） $\int_1^{e} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx = \int_1^{e} \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d(\ln x) = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \frac{\pi}{2}$。

（3）令 $\sqrt{x-1}=t$，则

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = 2\int_0^1 (1+t^2)dt = \frac{8}{3}。$$

（4）令 $\sqrt{1-x}=t$，则

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}。$$

（5） $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$。

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin\frac{1}{x^2}d(\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{x^2})\Big|_{0+}^1，$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{2}(\cos\frac{1}{x^2})$ 极限不存在，所以积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 发散；同理积分 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 也发散。

（6）令 $\sqrt{\tan x}=t$，再利用上面习题 3（9），得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

5. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。

解 $$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln xdx=-1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}。$$

6. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx$；　　(2) $\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx$。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot xdx$；　　(4) $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx$；

(5) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

解 (1) 令$x=\frac{\pi}{2}-t$，再利用例 8.1.11，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=-\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(2) 令$x=\pi-t$，由

$$\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx=\int_0^{\pi}\pi\ln\sin tdt-\int_0^{\pi}t\ln\sin tdt,$$

得到

$$\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2。$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\ln\sin x=(x\ln\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(4) 令$t=\arcsin x$，得到

$$\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cot tdt=\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \ln x d\arcsin x = (\ln x \arcsin x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$。

7. 求下列反常积分的 Cauchy 主值：

⑴ $(\text{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$；　⑵ $(\text{cpv})\int_1^4 \frac{1}{x-2}dx$；

⑶ $(\text{cpv})\int_{1/2}^2 \frac{1}{x\ln x}dx$。

**解** (1) $(\text{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}[\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]\Big|_{-A}^{+A} = \pi$。

(2) $(\text{cpv})\int_1^4 \frac{1}{x-2}dx = \lim_{\eta\to 0+}[(\ln|x-2|)\Big|_{2+\eta}^4 + (\ln|x-2|)\Big|_1^{2-\eta}] = \ln 2$。

(3) $(\text{cpv})\int_{1/2}^2 \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\eta\to 0+}[(\ln|\ln x|)\Big|_{1+\eta}^2 + (\ln|\ln x|)\Big|_{1/2}^{1-\eta}] = 0$。

8. 说明一个无界函数的反常积分可以化为无穷区间的反常积分。

**证** 设 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个无界函数反常积分，$x=b$ 是 $f(x)$ 的唯一奇点（即 $f(x)$ 在 $x=b$ 的左领域无界)。令 $t=\frac{b-a}{b-x}$，则

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_1^{+\infty} f\left(b-\frac{b-a}{t}\right)\frac{dt}{t^2},$$

等式右端就是一个无穷区间的反常积分。

9. ⑴ 以 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为例，叙述并证明反常积分的保序性和区间可加性；

⑵ 举例说明，对于反常积分不再成立乘积可积性。

**解** （1）保序性：

设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，且在 $[a,+\infty)$ 成立 $f(x)\ge g(x)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \ge \int_a^{+\infty} g(x)dx\ ;$$

证明：由定积分的保序性，可知 $\int_a^A f(x)dx \ge \int_a^A g(x)dx$，再令 $A\to+\infty$。

区间可加性：

设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则对任意$c\in[a,+\infty)$，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx\text{ ；}$$

证明：由定积分的区间可加性，可知$\int_a^A f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^A f(x)dx$，再令$A\to+\infty$。

(2)设$f(x)=g(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$,则$\int_1^{+\infty} f(x)dx$与$\int_1^{+\infty} g(x)dx$收敛,但$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$不收敛。

10. 证明当$a>0$时，只要下式两边的反常积分有意义，就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx=\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx\text{。}$$

证 $\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx=\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx$

$$=\int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx+\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx\text{，}$$

对上式右端两积分中任意一个（例如第二个）作变量代换$x=\dfrac{a^2}{t}$，则当$x:a\to+\infty$时，$t:a\to0$；且$\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{t}{a}+\dfrac{a}{t}$，$\dfrac{\ln x-\ln a}{x}dx=\dfrac{\ln t-\ln a}{t}dt$，于是由

$$\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx=-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt\text{，}$$

得到

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt=0\text{。}$$

11．设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。证明$A=0$。

证 用反证法。不妨设$A>0$，则对$\varepsilon=\frac{1}{2}A>0$，$\exists X>a$，$\forall x>X$：$|f(x)-A|<\frac{1}{2}A$，从而$f(x)>\frac{1}{2}A$。由

$$\int_a^B f(x)dx=\int_a^X f(x)dx+\int_X^B f(x)dx>\int_a^X f(x)dx+\frac{1}{2}A(B-X),$$

可知$\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx=+\infty$，与$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛发生矛盾。

同理也可证明不可能有$A<0$，所以$A=0$。

12．设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可导，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$都收敛，证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证 $$\int_a^{+\infty} f'(x)dx=\int_a^{+\infty} df(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-f(a),$$

由$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$的收敛性，可知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限，再利用第11题的结论，得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0。$$

# 习　题　8.2　反常积分的收敛判别法

1. ⑴　证明比较判别法（定理 8.2.2）；

⑵　举例说明，当比较判别法的极限形式中 $l=0$ 或 $+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性可以产生各种不同的的情况。

**解**（1）**定理 8.2.2(比较判别法)**　设在 $[a,+\infty)$ 上恒有 $0\le f(x)\le K\varphi(x)$，其中 $K$ 是正常数。则

当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散。

**证**　当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛时，应用反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0，\ \exists A_0\ge a，\ \forall A,A'\ge A_0：\left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{K}。$$

于是

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\le\left|\int_A^{A'}K\varphi(x)dx\right|<\varepsilon，$$

所以 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，应用反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\exists\varepsilon_0>0，\ \forall A_0\ge a，\ \exists A,A'\ge A_0：\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\ge K\varepsilon。$$

于是

$$\left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right|\ge\left|\int_A^{A'}\frac{1}{K}f(x)dx\right|\ge\varepsilon_0，$$

所以 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散。

（2）设在 $[a,+\infty)$ 上有 $f(x)\ge 0,\varphi(x)\ge 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$。则当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散；但当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 可能收敛，

也可能发散。

例如 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，$\varphi(x)=\frac{1}{x^p}(0<p<2)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$。显然有 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，而对于 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$，则当 $1<p<2$ 时收敛，当 $0<p\le 1$ 时发散。

设在 $[a,+\infty)$ 上有 $f(x)\ge 0,\varphi(x)\ge 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty$。则当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也收敛；但当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 可能发散，也可能收敛。

例如 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，$\varphi(x)=\frac{1}{x^p}(p>\frac{1}{2})$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty$。显然有 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 发散，而对于 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$，则当 $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛。

2. 证明 Cauchy 判别法及其极限形式（定理 8.2.3）。

**证 定理 8.2.3（Cauchy 判别法）** 设在 $[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\ge 0$，$K$ 是正常数。

(1) 若 $f(x)\le\frac{K}{x^p}$，且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

(2) 若 $f(x)\ge\frac{K}{x^p}$，且 $p\le 1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

**推论（Cauchy 判别法的极限形式）** 设在 $[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\ge 0$，且

$$\lim_{x\to+\infty}x^p f(x)=l,$$

则

(1) 若 $0\le l<+\infty$，且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

(2) 若$0 < l \le +\infty$，且$p \le 1$，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

**证**　直接应用定理 8.2.2（比较判别法）及其推论（比较判别法的极限形式），将函数$\varphi(x)$取为$\frac{1}{x^p}$。

3. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} dx$；　　(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^3} dx$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|} dx$；　　(4) $\int_1^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx$ （$p,q \in \mathbf{R}^+$）.

**解**　(1) 当$x \to +\infty$时，

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

所以积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} dx$收敛。

(2) 当$x \to +\infty$时，

$$\frac{\arctan x}{1+x^3} \sim \frac{\pi}{2x^3},$$

所以积分$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^3} dx$收敛。

(3) 因为当$x \ge 0$时有

$$\frac{1}{1+x|\sin x|} \ge \frac{1}{1+x},$$

而积分$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$发散，所以积分$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|} dx$发散。

(4) 当$x \to +\infty$时，

$$\frac{x^q}{1+x^p} \sim \frac{1}{x^{p-q}},$$

所以在 $p-q>1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分

$\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ 发散。

4. 证明：对非负函数 $f(x)$，(cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛与 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是等价的。

证　显然，由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛可推出 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，现证明当 $f(x)\ge 0$ 时可由 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛推出 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

由于 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，可知极限

$$\lim_{A\to+\infty}F(A)=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$$

存在而且有限，由 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists A_0>0,\ \forall A,A'\ge A_0:\ |F(A)-F(A')|<\varepsilon,$$

于是 $\forall A,A'\ge A_0$ 与 $\forall B,B'\ge A_0$，成立

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\le|F(A)-F(A')|<\varepsilon \quad 与 \quad \left|\int_{-B'}^{-B}f(x)dx\right|\le|F(B)-F(B')|<\varepsilon,$$

这说明积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ 都收敛，所以积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

5. 讨论下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛、条件收敛和发散，下同）：

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx$；　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$　（$p\in\mathbf{R}^+$）；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$　（$p\in\mathbf{R}^+$）；　　(4) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$；

(5) $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$　（$p_m(x)$ 和 $q_n(x)$ 分别是 $m$ 和 $n$ 次多项式，$q_n(x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 范围无零点。）

解 (1) 因为 $F(A)=\int_2^A\sin xdx$ 有界，$\frac{\ln\ln x}{\ln x}$ 在 $[2,+\infty)$ 单调，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx$ 收敛；

由于 $\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right| \ge \left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\sin^2 x = \frac{1}{2}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|(1-\cos 2x)$，而积分 $\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|dx$ 发散，$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\cos 2x dx$ 收敛，所以积分 $\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|dx$ 发散，即积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x dx$ 条件收敛。

（2）当 $p>1$ 时，$\frac{|\sin x|}{x^p} \le \frac{1}{x^p}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛，所以当 $p>1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 绝对收敛；

当 $0<p\le 1$ 时，因为 $F(A)=\int_1^A \sin x dx$ 有界，$\frac{1}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛；但因为当 $0<p\le 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}dx$ 发散，所以当 $0<p\le 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛。

（3）当 $p>1$ 时，$\frac{|\sin x\arctan x|}{x^p} \le \frac{\pi}{2x^p}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛，所以当 $p>1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ 绝对收敛；

当 $0<p\le 1$ 时，因为 $F(A)=\int_1^A \sin x dx$ 有界，$\frac{\arctan x}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ 收敛；但因为当 $0<p\le 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}|\sin x|dx$ 发散，所以当 $0<p\le 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ 条件收敛。

（4）令 $t=x^2$，$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$，由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$ 条件收敛，可知积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ 条件收敛。

（5）当$n>m+1$且$x$充分大时，有$\left|\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\right|\le\frac{K}{x^2}$，可知当$n>m+1$时积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$绝对收敛。

当$n=m+1$时，因为$F(A)=\int_1^A\sin xdx$有界，且当$x$充分大时，$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}$单调且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=0$，由 Dirichlet 判别法可知$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$收敛；但由于当$x\to+\infty$时，$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sim\frac{a}{x}$，易知$\int_1^{+\infty}\left|\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\right|dx$发散，所以当$n=m+1$时，积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$条件收敛。

当$n<m+1$时，由$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=A$，$A$为非零常数、$+\infty$或$-\infty$，易知积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$发散。

6. 设$f(x)$在$[a,b]$只有一个奇点$x=b$，证明定理 8.2.3′和定理 8.2.5′。

**定理 8.2.3′（Cauchy 判别法）** 设在$[a,b)$上恒有$f(x)\ge 0$，若当$x$属于$b$的某个左邻域$[b-\eta_0,b)$时，存在正常数$K$，使得

⑴ $f(x)\le\frac{K}{(b-x)^p}$，且$p<1$，则$\int_a^b f(x)dx$收敛；

⑵ $f(x)\ge\frac{K}{(b-x)^p}$，且$p\ge 1$，则$\int_a^b f(x)dx$发散。

证 （1）当$p<1$时，积分$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx$收敛，由反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \eta, \eta' \in (0, \delta):\ \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} \frac{1}{(b-x)^p} dx \right| < \frac{\varepsilon}{K}。$$

由于$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx \right| \le \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} \frac{K}{(b-x)^p} dx \right| < \varepsilon$，所以$\int_a^b f(x)dx$收敛。

（2）当 $p \ge 1$时，积分$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$发散，由反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists \eta, \eta' \in (0, \delta):\ \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} \frac{1}{(b-x)^p} dx \right| \ge \frac{\varepsilon_0}{K}。$$

由于$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx \right| \ge \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} \frac{K}{(b-x)^p} dx \right| \ge \varepsilon_0$，所以$\int_a^b f(x)dx$发散。

**推论（Cauchy 判别法的极限形式）**设在$[a, b)$上恒有 $f(x) \ge 0$，且

$$\lim_{x \to b-} (b-x)^p f(x) = l,$$

则

（1）若$0 \le l < +\infty$，且 $p < 1$，则$\int_a^b f(x)dx$收敛；

（2）若$0 < l \le +\infty$，且 $p \ge 1$，则$\int_a^b f(x)dx$发散。

**证** （1）由 $\lim_{x \to b-} (b-x)^p f(x) = l$ （$p < 1,\ 0 \le l < +\infty$），可知

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in (b-\delta, b):\ f(x) < \frac{l+1}{(b-x)^p},$$

再应用定理 8.2.3′的（1）。

（2）由 $\lim_{x \to b-} (b-x)^p f(x) = l$ （$p \ge 1,\ 0 < l \le +\infty$），可知

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in (b-\delta, b):\ f(x) > \frac{l}{2(b-x)^p},$$

再应用定理 8.2.3′的（2）。

**定理 8.2.5′** 若下列两个条件之一满足，则$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛：

⑴（**Abel 判别法**） $\int_a^b f(x)dx$ 收敛， $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界；

⑵（**Dirichlet 判别法**） $F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ 在 $(0,b-a]$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$。

证 （1）设 $|g(x)|\le G$，因为 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall A,A'\in(b-\delta,b)$：$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<\dfrac{\varepsilon}{2G}$。

由积分第二中值定理，

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+|g(A')|\cdot\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right|$$
$$\le G\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+G\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

（2）设 $|F(\eta)|\le M$，于是 $\forall A,A'\in[a,b)$，有 $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<2M$。因为 $\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in(b-\delta,b)$，有 $|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$。由积分第二中值定理，

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+|g(A')|\cdot\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right|$$
$$\le 2M|g(A)|+2M|g(A')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

所以无论哪个判别法条件满足，由 Cauchy 收敛原理，都有 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛的结论。

7. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

⑴ $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$；

⑵ $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^2-1}dx$；

⑶ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$；

⑷ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos x}{x^p}dx$；

⑸ $\int_0^1 |\ln x|^p\,dx$；

⑹ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$；

⑺ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\,dx$.

解 （1）因为 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\ (x\to 0+)$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\sim\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 1-)$，

所以积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$ 收敛。

（2）因为$\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\ln x}{x^2-1}=\frac{1}{2}$，且对任意$0<\delta<1$，$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^\delta \ln x}{x^2-1}=0$，即当$x>0$充分小时，有$\left|\frac{\ln x}{x^2-1}\right|<\frac{1}{x^\delta}$，所以积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx$收敛。

（3）因为$\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\sim\frac{1}{x^2}\ (x\to 0+)$，$\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\sim\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}\ (x\to\frac{\pi}{2}-)$，所以积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$发散。

（4）因为$\frac{1-\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{2x^{p-2}}\ (x\to 0+)$，所以当$p<3$时积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$收敛，当$p\geq 3$时积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$发散。

（5）首先对任意的$0<\delta<1$与任意的$p$，有$\lim\limits_{x\to 0+}[x^\delta\,|\ln x|^p]=0$，即当$x>0$充分小时，有$|\ln x|^p<\frac{1}{x^\delta}$；且 $|\ln x|^p\sim\frac{1}{(1-x)^{-p}}\ (x\to 1-)$。所以当$p>-1$时，积分$\int_0^1|\ln x|^p\,dx$收敛，当$p\leq -1$时，积分$\int_0^1|\ln x|^p\,dx$发散。

（6） $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim\frac{1}{(1-x)^{1-q}}\ (x\to 1-)$，所以在$p>0, q>0$时积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛，在其余情况下积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 发散。

（7） $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,|\ln x|\sim\frac{1}{(1-x)^{-q}}\ (x\to 1-)$，且

$\lim\limits_{x\to 0+}[x^{1-\frac{p}{2}}(x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,|\ln x|)]=0$，即当$x>0$充分小时，有

$x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|<\frac{1}{x^{1-\frac{p}{2}}}$，所以当$p>0, q>-1$时积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,|\ln x|\,dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,|\ln x|\,dx$发散。

8. 讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ （$p,q\in\mathbf{R}^+$）；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$ ；

(5) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$；　　(6) $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$ ；

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$；　　(8) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$.

解（1） $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{p-1}}{\ln x}dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}}{\ln x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$。

当 $p>0$， $q>0$ 时积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{p-1}}{\ln x}dx$ 与积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}}{\ln x}dx$ 显然收敛，且当 $x\to 1-$ 时，

$$\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\frac{\left[(1+(x-1))^{p-1}-1\right]-\left[(1+(x-1))^{q-1}-1\right]}{\ln\left(1+(x-1)\right)}\sim\frac{(p-q)(x-1)}{x-1}=p-q,$$

即 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 不是反常积分，所以积分 $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 收敛。

（2） $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx+\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$
$+\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$。

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 0+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\ (x\to 1-),$$

所以积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 收敛；

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim -\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\ (x\to 1+)，$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 2-)，$$

所以积分$\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$收敛；

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 2+)，$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\ (x\to +\infty)，$$

所以积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$收敛。

由此可知积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$收敛。

（3） $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$。

由$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$，可知当$p<2$时，积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛，当$p\ge 2$时，积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散；

当$p>1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^{\frac{3p-1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^p}\right]=0$，即当$x>0$充分大时，有$\frac{\ln(1+x)}{x^p}<\frac{1}{x^{\frac{3p-1}{2}}}$，其中$\frac{3p-1}{2}>1$，可知当$p>1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛，当$p\le 1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散；

综上所述，当$1<p<2$时，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散。

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$。

由$\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$,可知当$p<2$时积分$\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛；

由$\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{\pi}{2x^p}\ (x\to +\infty)$，可知当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛。

所以当$1<p<2$时积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$发散。

（5）$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$。

由$\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-\frac{1}{2}}}\ (x\to 0+)$，可知当$p<\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛，当$p\ge\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$发散；

由$\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\sim\frac{2^p}{\pi^p(\frac{\pi}{2}-x)^{\frac{1}{2}}}\ (x\to\frac{\pi}{2}-)$，可知积分$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛。

所以当$p<\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛，当$p\ge\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$发散。

（6）$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$。

由于积分$\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$收敛，及$x^{p-1}e^{-x}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$，所以当$p>0$时积分$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$收敛，当$p\le 0$时积分$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$发散。

（7） $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx=\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$。

当 $p=q$ 时，显然积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 发散；

当 $p\neq q$ 时，由于

$$\frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^{\min(p,q)}}\ (x\to 0+),\quad \frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^{\max(p,q)}}\ (x\to +\infty),$$

所以当 $\min(p,q)<1$，且 $\max(p,q)>1$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 收敛，其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 发散。

（8）设 $p>1$，则对任意的 $q$，当 $x$ 充分大时，有 $\frac{1}{x^p\ln^q x}<\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$，因为 $\frac{p+1}{2}>1$，可知积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 收敛。

设 $p<1$，则对任意的 $q$，当 $x$ 充分大时，有 $\frac{1}{x^p\ln^q x}>\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$，因为 $\frac{p+1}{2}<1$，可知积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 发散。

设 $p=1$，令 $\ln x=t$，则 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^q}$，由此可知当 $p>1$ 或 $p=1,q>1$ 时积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 发散。

9. 讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$；

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ （$p\geq 0$）；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$；

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$；

(5) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$；　　　　(6) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$　（$p>0$）.

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$。

由 $\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$，$\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^{3-p}}\ (x\to+\infty)$，可知当 $0<p<2$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$ 发散。

（2）当 $q<p-1$ 时，由 $\frac{x^q\,|\sin x|}{1+x^p}<\frac{1}{x^{p-q}}$，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ 绝对收敛。

当 $p-1\le q<p$ 时，因为 $F(A)=\int_1^A\sin x dx$ 有界，当 $x$ 充分大时 $\frac{x^q}{1+x^p}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ 收敛；但因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\,|\sin x|}{1+x^p}dx$ 发散，所以当 $p-1\le q<p$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛。

当 $q\ge p$ 时，由于 $n\to\infty$ 时 $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ 不趋于零，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ 发散。

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$。

由 $\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{x^p}\ (x\to 0+)$，可知当 $p<1$ 时积分 $\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 发散。

当 $p<1$ 时，易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\,|\cos x|}{x^p}dx$ 发散；当 $p\le 0$ 时，易知积分

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$发散。

当 $0<p<1$ 时，因为 $\left|\int_1^A e^{\sin x}\cos x dx\right|<e-1$，$\frac{1}{x^p}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法；可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 收敛。

综上所述，当 $0<p<1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 条件收敛，在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 发散。

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$。

由 $\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\frac{2}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$，可知当 $p<2$ 时积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发散。

当 $1<p<2$ 时，显然积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx$ 收敛；当 $p\le 1$ 时，易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx$ 发散；当 $p\le 0$ 时，易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发散。

当 $0<p\le 1$ 时，因为 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{\sin x}\sin 2x dx=0$，可知 $\left|\int_0^A e^{\sin x}\sin 2x dx\right|$ 有界，且 $\frac{1}{x^p}$ 单调减少，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 收敛。

综上所述，当 $1<p<2$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 绝对收敛，当 $0<p\le 1$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 条件收敛，在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发

散。

（5）令$t=\frac{1}{x^2}$，则

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3-p}{2}}}\cos t dt \text{。}$$

于是可知当$p<1$时积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$绝对收敛；当$1\le p<3$时积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$条件收敛，当$p\ge 3$时积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$发散。

（6）当$p>1$时，因为$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\le\frac{1}{x^p}$，可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$绝对收敛。

当$0<p\le 1$时，因为$\int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}dx>\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}$发散，所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}dx$发散；又因为

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cos x+\cos\frac{1}{x}\sin x}{x^p}dx$，注意到当$x$充分大时，$\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$与$\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}$都是单调减少的，由 Dirichlet 判别法可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$收敛，所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$条件收敛。

10．证明反常积分$\int_0^{+\infty}x\sin x^4\sin x dx$收敛。

**证**　对任意 $A''>A'>A$，由分部积分法，

$$\int_{A'}^{A''} x\sin x^4 \sin x dx = -\int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{4x^2} d(\cos x^4)$$

$$= \left(-\frac{\sin x\cos x^4}{4x^2}\right)\Bigg|_{A'}^{A''} + \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x^4 \cos x}{4x^2} dx - \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x^4 \sin x}{2x^3} dx \text{。}$$

显然，当 $A\to+\infty$ 时，等式右端的三项都趋于零，由 Cauchy 收敛原理，可知反常积分 $\int_0^{+\infty} x\sin x^4 \sin x dx$ 收敛。

11．设 $f(x)$ 单调，且当 $x\to 0+$ 时 $f(x)\to+\infty$，证明：$\int_0^1 f(x)dx$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{x\to 0+} xf(x)=0$。

**证**　首先由 $f(x)$ 的单调性，对于充分小的 $0<x<1$，有

$$0\le \frac{x}{2} f(x) \le \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \text{。}$$

由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{x\to 0+} \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt = 0$，于是得到

$$\lim_{x\to 0+} xf(x)=0 \text{。}$$

12．设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少，证明:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x) f(x) = 0 \text{。}$$

**证**　首先容易知道当 $x\to+\infty$ 时，$xf(x)$ 单调减少趋于 $0$，于是有 $xf(x)\ge 0$，且

$$0\le \frac{1}{2} x(\ln x) f(x) \le \int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\cdot\frac{1}{t} dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt \text{。}$$

然后由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt = 0$，于是得到

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x) f(x) = 0 \text{。}$$

13．设 $f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则反常积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\, dx$ 收敛。

证　首先由分部积分法，

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx = \int_0^{+\infty}\sin^2 xdf(x) = -\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx。$$

由于 $F(A)=\int_0^A \sin 2xdx$ 有界，$f(x)$ 单调下降，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，由 Dirichlet 判别法，可知积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$ 收敛，从而积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,dx$ 收敛。

14．设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛。

证　首先由 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，可知 $\exists A>a$，$\forall x>A$，有 $|f(x)|<1$，即当 $x>A$ 时，成立 $f^2(x)\le|f(x)|$。因为积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，于是由比较判别法，积分 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛。

15．　若 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上平方可积（类似可定义无界函数在 $[a,b]$ 上平方可积的概念)。

⑴ 对两种反常积分分别探讨 $f(x)$ 平方可积与 $f(x)$ 的反常积分收敛之间的关系；

⑵ 对无穷区间的反常积分，举例说明，平方可积与绝对收敛互不包含；

⑶ 对无界函数的反常积分，证明：平方可积必定绝对收敛，但逆命题不成立。

解　(1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，例如：$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 发散；

$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

（2）$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，例如：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 不是绝对收敛的；

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，例如：

$f(x)=\begin{cases} n & x\in \bigcup\limits_{n=2}^{\infty}[n,n+\dfrac{1}{n^3}] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，但 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 发散。

（3）由 $|f(x)|\le \dfrac{1}{2}[1+f^2(x)]$，可知 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛保证 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛；但 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛不能保证 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛，例如：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $\int_0^1 f(x)dx$ 绝对收敛，但 $\int_0^1 f^2(x)dx$ 发散。

16．证明反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$$

当 $p\le \dfrac{1}{2}$ 时发散，当 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛，当 $p>1$ 时绝对收敛。

证　当 $p>1$ 时，对充分大的 $x$，有 $\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\le \dfrac{2}{x^p}$，由于积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{2}{x^p}dx$ 收敛，可知积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 绝对收敛。

当 $0<p\le 1$ 时，利用等式

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}。$$

这时积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛；积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$ 当 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时收敛，当 $0<p\le \dfrac{1}{2}$ 发散。

当 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时，由于 $\int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{3\pi}{4}}\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx\ge \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$，因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$ 发散，所以积分 $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx$ 发散。

综上所述，当$\frac{1}{2}<p\le 1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$条件收敛；当$0<p\le\frac{1}{2}$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$发散。

当$p\le 0$时，因为有$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx>\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2}dx>\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$，由 Cauchy 收敛原理，可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$发散。

# 第九章　数项级数

## 习　题　9.1　数项级数的收敛性

1. 讨论下列级数的收敛性。收敛的话，试求出级数之和。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$；

(9) $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta \quad (|q|<1)$.

解　(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}。$$

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}\neq 0$，所以级数发散。

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$，

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}。$$

(4) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}。$$

(5) 因为 $\lim_{n\to\infty}x_n=1\neq 0$，所以级数发散。

（6） $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{5^{k-1}+4^{k+1}}{3^{2k}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1-\frac{5}{9}}+\frac{16}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=3\frac{9}{20}。$$

（7） $S_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\sqrt{2}+1。$$

（8）设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k}$，则 $3S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{3^k}$，两式相减，得到

$$2S_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^k}-\frac{2n-1}{3^n}=1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^n},$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1；$$

（9） $\sum_{k=0}^{n}q^k e^{ik\theta}=\frac{1-\left(qe^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-qe^{i\theta}}$，由 $|q|<1$，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n e^{in\theta}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}q^k e^{ik\theta}=\frac{1}{1-qe^{i\theta}}。$$

利用 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，对上式两边取实部，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta=\frac{1-q\cos\theta}{1-2q\cos\theta+q^2}。$$

2．确定 $x$ 的范围，使下列级数收敛。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x)^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{nx}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$.

解　（1）由 $-1<\frac{1}{1-x}<1$ 解得 $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$。

（2）由 $e^x<1$ 解得 $x\in(-\infty,0)$。

（3）当 $x=1$ 时显然级数收敛；当 $x\neq 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ ，收敛范围是 $x\in(-1,1)$ ；所以当 $x\in(-1,1]$ 时级数收敛。

3．求八进制无限循环小数（36.0736073607 …）$_8$ 的值。

**解** $(36.0736073607\ \ldots)_8$

$$=3\times 8+6+\sum_{n=0}^{\infty}\left[7\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+2}+3\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+3}+6\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+4}\right]=30\frac{478}{4095}。$$

4．设 $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$ ，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的和。

**解** $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^2 dx=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$，

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{6}。$$

5. 设抛物线 $l_n$ ：$y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $l_n'$ ：$y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 $a_n$ （$n=1,2,\cdots$）。

(1) 求抛物线 $l_n$ 与 $l_n'$ 所围成的平面图形的面积 $S_n$ ；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和。

**解** (1) 容易求出抛物线 $l_n$ ：$y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $l_n'$ ：$y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，于是

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[\left(nx^2+\frac{1}{n}\right)-\left((n+1)x^2+\frac{1}{n+1}\right)\right]dx=\frac{4}{3}a_n^{\ 3}；$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{\ 2}=\frac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}$。

# 习　题　9.2　上极限与下极限

1. 求下列数列的上极限与下极限

(1) $x_n = \dfrac{n}{2n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{5}$；　　(2) $x_n = n + (-1)^n \dfrac{n^2+1}{n}$；

(3) $x_n = -n\,[\,(-1)^n + 2]$；　　(4) $x_n = \sqrt[n]{n+1} + \sin\dfrac{n\pi}{3}$；

(5) $x_n = 2\,(-1)^{n+1} + 3\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

解（1） $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \dfrac{1}{2}$， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{5}$。

（2） $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$。

（3） $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$。

（4） $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

（5） $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 5$， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -5$。

2. 证明：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$；　　(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(c\,x_n) = \begin{cases} c\,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n, & c>0, \\ c\,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n, & c<0. \end{cases}$

证　仅对$\{x_n\}$是有界数列给出证明。

（1）设$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \eta$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$x_n > \eta-\varepsilon$对一切 $n>N$ 成立，且$\{x_n\}$中有无穷多项，满足$x_n < \eta+\varepsilon$；于是$-x_n < -\eta+\varepsilon$ 对一切 $n>N$ 成立，且$\{-x_n\}$中有无穷多项，满足$-x_n > -\eta-\varepsilon$；于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) = -\eta = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\text{。}$$

（2）设$c>0$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \xi$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$x_n < \xi + \dfrac{\varepsilon}{c}$对一切$n>N$成立，且$\{x_n\}$中有无穷多项，满足$x_n > \xi - \dfrac{\varepsilon}{c}$；于是$cx_n < c\xi+\varepsilon$对一切 $n>N$ 成立，且$\{cx_n\}$中有无穷多项，满足$cx_n > c\xi-\varepsilon$；所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(cx_n) = c\xi = c\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\text{。}$$

设$c<0$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \eta$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，使得

$x_n > \eta + \dfrac{\varepsilon}{c}$对一切$n > N$成立，且$\{x_n\}$中有无穷多项，满足$x_n < \eta - \dfrac{\varepsilon}{c}$；于是$cx_n < c\eta + \varepsilon$对一切 $n > N$ 成立，且$\{cx_n\}$中有无穷多项，满足$cx_n > c\xi - \varepsilon$；所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(cx_n) = c\eta = c\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n。$$

3. 证明：

(1) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$；

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n。$$

**证** （1）记$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = h_1$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n = h_2$，则对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在正整数$N$，对一切$n > N$，成立 $x_n > h_1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$，$y_n > h_2 - \dfrac{\varepsilon}{2}$，即

$$x_n + y_n > h_1 + h_2 - \varepsilon，$$

于是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \ge h_1 + h_2 - \varepsilon。$$

由$\varepsilon$的任意性，即得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \ge h_1 + h_2 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n。$$

（2）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，则由（1），

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \ge \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n，$$

且

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,[(x_n + y_n) - x_n] \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) + \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-x_n)$$
$$= \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n，$$

两式结合即得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n。$$

4. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$-\infty < x < 0$，则

（1） $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$；

（2） $\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$。

**证** 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$-\infty < x < 0$，可知对任意给定的$\varepsilon\ (0 < \varepsilon < -x)$，存在正整数$N_1$，对一切$n > N_1$，成立

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon < 0。$$

记$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n = H$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n = h$，则对上述$\varepsilon\ (0 < \varepsilon < -x)$，存在正整数$N_2$，对

一切 $n > N_2$，成立

$$h-\varepsilon < y_n < H+\varepsilon。$$

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，则当 $n>N$ 时，成立

$$\min\{(x-\varepsilon)(H+\varepsilon),(x+\varepsilon)(H+\varepsilon)\} < x_n y_n < \max\{(x-\varepsilon)(h-\varepsilon),(x+\varepsilon)(h-\varepsilon)\},$$

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \ge \min\{(x-\varepsilon)(H+\varepsilon),(x+\varepsilon)(H+\varepsilon)\},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \le \max\{(x-\varepsilon)(h-\varepsilon),(x+\varepsilon)(h-\varepsilon)\},$$

由 $\varepsilon$ 的任意性，即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \ge xH = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \le xh = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n。$$

由于

$$\varliminf_{n\to\infty} y_n = \varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right] \ge \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n),$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} y_n = \varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right] \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n),$$

又得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \le \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \ge \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n。$$

将此两式与前面两式结合，即得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\ y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\ y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n。$$

# 习　题　9.3　正项级数

1. 讨论下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+1}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$；

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$；

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$；

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-n}$；

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；

(15) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}$；

(16) $\sum_{n=3}^{\infty}(-\ln\cos\frac{\pi}{n})$；

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$　$(a>0)$。

解（1）因为$\frac{4n}{n^4+1}\sim\frac{4}{n^3}\ (n\to\infty)$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+1}$收敛。

（2）因为$\frac{2n^2}{n^3+3n}\sim\frac{2}{n}\ (n\to\infty)$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$发散。

（3）因为$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散。

（4）因为当$n\ge 4$有$\frac{1}{n!}<\frac{1}{n^2}$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛。

（5）因为$\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{n\sqrt{n}}$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$收敛。

（6）
$$1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}\ (n\to\infty),$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$收敛。

（7）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散。

（8）因为当 $n\geq 3$ 有

$$\sqrt[n]{n}-1>e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty),$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ 发散。

（9）设 $x_n=\frac{n^2}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1,$$

由 D'Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛。

（10）设 $x_n=\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}=\frac{3}{4}<1,$$

由 Cauchy 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$ 收敛。

（11）设 $x_n=n^2e^{-n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{e}<1,$$

由 D'Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\,\mathrm{e}^{-n}$ 收敛。

（12）设 $x_n=\frac{2^n n!}{n^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{e}<1,$$

由 D'Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛。

（13） $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\sim\dfrac{1}{n}\ (n\to\infty)$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$发散。

（14） $2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{2\left(n^2-\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}\right)}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$

$$=\frac{2}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{1}{n^2+\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}}\sim\frac{1}{4n^3}\ (n\to\infty)\text{，}$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^3}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$收敛。

（15） $\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}=\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2-1}\right)\sim\dfrac{2}{n^2}\ (n\to\infty)$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$收敛。

（16） $-\ln\cos\dfrac{\pi}{n}=-\ln\left[1-\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\right]=-\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}\right)\sim\dfrac{\pi^2}{2n^2}\ (n\to\infty)$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^2}{2n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-\ln\cos\dfrac{\pi}{n})$收敛。

（17）设$x_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}a & 0<a<1\\ \dfrac{1}{2} & a=1\\ 0 & a>1\end{cases}\text{，}$$

由 D’Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ ($a$＞0)收敛。

2. 利用级数收敛的必要条件，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$；　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$。

证 （1）设$x_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0$，由 D’Alembert

判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，所以$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$。

（2）设$x_n = \frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$，则$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^{2(n+1)}} = 0$，由 D'Alembert 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，所以$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}} = 0$。

3. 利用 Raabe 判别法判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ $(a>0)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$；　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$。

解 (1) 设$x_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = a,$$

由 Raabe 判别法，

当$a > 1$时，级数收敛，当$0 < a < 1$时，级数发散；

当$a = 1$，$x_n = \frac{1}{n+1}$，级数发散。

(2) 设$x_n = \frac{1}{3^{\ln n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \ln 3 > 1,$$

由 Raabe 判别法，级数收敛。

(3) 设$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \ln 2 < 1,$$

由 Raabe 判别法，级数发散。

4. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$。

**解** (1) 当 $n\geq 2$，有

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{2x}dx<\frac{1}{n\sqrt{n}}，$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(2) $$\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx>\frac{1}{4n^2\pi^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{8n\pi}，$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n\pi}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 发散。

(3) $$\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)dx<\int_0^{\frac{1}{n}}xdx=\frac{1}{2n^2}，$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

5. 利用不等式 $\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{1}{n}$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在(此极限为 Euler 常数 $\gamma$ — 见例 2.4.8)。

**证** 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<0，$$

$$x_n>\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x}+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}>0，$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少有下界，因此收敛。

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=$ 0 或+∞，请问这两个级数的敛散性关系如何?

**解** 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$，则当 $n$ 充分大时有 $x_n<y_n$，所以当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 必定收敛，当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 必定发散；

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$，则当$n$充分大时有$x_n>y_n$，所以当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$发散时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$必定发散，当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$必定收敛。

7. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$也收敛；反之如何?

解 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，所以当$n$充分大时有$0\le x_n<1$，即有$x_n^2\le x_n$，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛；反之，当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$不一定收敛，例如$x_n=\dfrac{1}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散。

8. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则当$p>\dfrac{1}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$收敛；又问当$0<p\le\dfrac{1}{2}$时，结论是否仍然成立?

解 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。当$p>\dfrac{1}{2}$时，由

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\le\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

以及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$的收敛性，可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$收敛。

当$0<p\le\dfrac{1}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$不一定收敛。例如$x_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$发散。

9．设$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

（1）证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$收敛，并求其和；

（2）进一步设$f(x)$在$[1,+\infty)$上二阶可导，且$f''(x)<0$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$收敛。

证 (1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$的部分和为$S_n=f(n+1)-f(1)$，由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$得到$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A-f(1)$；

(2) 由 Lagrange 中值定理以及 $f'(x)$ 单调减少，得到

$$0 \le f'(n) < f'(\xi) = f(n) - f(n-1)，$$

由 $\sum_{n=2}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛，即得到 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛。

10．设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$， $n = 1,2,\cdots$。

（1）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的和；

（2）设 $\lambda > 0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

**证** （1） $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d\tan x = \frac{1}{n+1}$，

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1；$$

（2）由 $a_n > 0$ 及 $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$，可知 $a_n < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$，于是 $\frac{a_n}{n^{\lambda}} < \frac{1}{n^{1+\lambda}}$，

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

11. 设 $x_n > 0$，$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

**证** 由 $x_n > 0$，$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \frac{1}{n}$，得到

$$(n-1)x_n < n x_{n+1}，$$

即数列 $\{n x_{n+1}\}$ 单调增加。于是存在 $\alpha > 0$，使得 $n x_{n+1} \ge \alpha$，因而

$$x_{n+1} > \frac{\alpha}{n}。$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{n}$ 发散即可知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

12．设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散（$x_n > 0$， $n = 1,2,\cdots$），证明必存在发散的正

项级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$，使得$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$。

**证**　设$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$，则$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$。令

$$y_1=\sqrt{S_1}\,,\quad y_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\qquad (n=2,3,4,\cdots)\,,$$

于是$\sum_{k=1}^{n}y_k=\sqrt{S_n}$，即$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$是发散的正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}=0。$$

13. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散，$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}$收敛。

**证**　由$S_n\ge S_{n-1}$，可知

$$\frac{x_n}{{S_n}^2}\le\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\,,$$

由此得到$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{S_k^2}=\frac{2}{x_1}-\frac{1}{S_n}$。由$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}=\frac{2}{x_1}。$$

14．设$\{a_n\}$为 Fibonacci 数列。证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$收敛，并求其和。

**解**　首先 Fibonacci 数列具有性质$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$与$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}<2$

(见例 2.4.4)。设$x_n=\frac{a_n}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}<1\,,$$

由 D’Alembert 判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$收敛。

设$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$，则$2S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2^n}$，两式相加得到

$$3S = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{2^n} = 4S - a_1 - a_2,$$

于是

$$S = a_1 + a_2 = 2。$$

# 习 题 9.4 任意项级数

1. 讨论下列级数的收敛性(包括条件收敛与绝对收敛)

(1) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^2 n}{n}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$;

(11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$ （$a>0$）.

解（1）设级数 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$的部分和数列为$\{S_n\}$，则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)!},$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散，所以$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$，因此级数

$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$发散。

（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）当$n$充分大（即$n+x>0$）时是交错级数，且$\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$单调减少趋于零，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）收敛；又由于$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}\right|\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）条件收敛。

（3）当 $x=0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 的一般项都为零，所以级数绝对收敛。

设 $x\neq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 当 $n$ 充分大（即 $n>\frac{2|x|}{\pi}$）时是交错级数，且 $\left|\sin\frac{x}{n}\right|$ 单调减少趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 收敛；又由于 $\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}\right|\sim\frac{|x|}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 条件收敛。

（4）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 发散。

（5）$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^2 n}{n}$ 是交错级数，当 $n\geq 8$，$\frac{\ln^2 n}{n}$ 单调减少趋于零，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^2 n}{n}$ 收敛；又由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^2 n}{n}$ 条件收敛。

（6）设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$S_{6n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{2\sqrt{3k-1}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{\sqrt{3k}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2\sqrt{3n-1}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{3n}}$ 都是 Leibniz 级数，即都是收敛的，所以 $\lim_{n\to\infty}S_{6n}$ 存在且有限。容易证明

$$\lim_{n\to\infty}S_{6n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+2}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+3}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+4}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+5}=\lim_{n\to\infty}S_{6n},$$

由此可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 收敛。

由于 $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}\right|\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 条件收敛。

（7）当 $x\in(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6})$ 时，由于 $\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，$0\le 4\sin^2 x<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$ 绝对收敛。

当 $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin^2 x=\frac{1}{4}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是条件收敛级数。

在其他情况下，由于 $\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，$4\sin^2 x>1$，级数的一般项趋于无穷大，所以级数发散。

（8）当 $x=\frac{k\pi}{2}$ 时，级数的一般项都为零，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

设 $x\ne\frac{k\pi}{2}$。当 $p>1$ 时，由于 $\left|\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\right|\le\frac{1}{n^p}$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

当 $0<p\le 1$ 时，由于

$$\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}=\frac{\sin 2nx}{2n^p}+\frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n^p}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2x}{2n^p}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

当 $p\le 0$ 时，由于级数的一般项不趋于零，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

（9）设 $x_n=(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{|x|}{2}$，所以

当 $|x|<2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$ 绝对收敛；

当 $|x|>2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$ 发散；

当 $|x|=2$ 时，级数的一般项不趋于零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$ 也发散。

（10）设 $u_n=\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$。由于 $\{u_n\}$ 单调减少趋于零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 是 Leibniz 级数，因此收敛。

因为 $u_n\sim\frac{\ln 2}{3n}\ (n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{3n}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 条件收敛。

（11）设 $x_n=\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=|x|$，所以

当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$ 绝对收敛；

当 $|x|>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$ 发散；

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$，因此当 $p>1$ 或 $p=1,\ q>1$ 时级数（绝对）收敛，在其他情况下级数发散；

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}$，因此当 $p>1$ 或 $p=1,\ q>1$ 时级数绝对收敛，当 $p=1,\ q\le 1$ 或 $0<p<1$ 或 $p=0,\ q>0$ 时级数条件收敛，在其他情况下级数发散。

（12）设 $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$。

当$a>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{1}{a}<1$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$绝对收敛；

当$a=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$，级数条件收敛；

当$0<a<1$时，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛，$\left\{\frac{a}{1+a^n}\right\}$单调有界，由 Abel 判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$收敛，但由于$|x_n|\sim\frac{a}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}$发散，所以级数条件收敛。

2. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述级数发散：

⑴ $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$；

⑵ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$。

证 （1） 设级数的一般项为$x_n$，则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6},$$

由于$n$可以取任意大，由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

（2） 设级数的一般项为$x_n$，则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+6}+\cdots+\frac{1}{6n}>\frac{n}{6n}=\frac{1}{6},$$

由于$n$可以取任意大，由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

3. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，$\{x_n\}$ 单调减少，利用 Cauchy 收敛原理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0$。

证 由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N'>0$，对一切$m>n>N'$，成立

$$0<x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m<\frac{\varepsilon}{2}。$$

取$N=2(N'+1)$，则当$n>N$时，有$\left[\frac{n}{2}\right]>N'$，于是成立

$$0<\frac{n}{2}x_n<x_{\left[\frac{n}{2}\right]}+x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots+x_n<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$0 < nx_n < \varepsilon\text{。}$$

4. 若对任意$\varepsilon > 0$和任意正整数 $p$，存在$N(\varepsilon, p)$，使得

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切 $n$＞$N$ 成立，问级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是否收敛？

解　级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不一定收敛。

例如：级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，但对任意$\varepsilon > 0$和任意正整数 $p$，取$N(\varepsilon, p) = \frac{p}{\varepsilon}$，当$n > N(\varepsilon, p)$时，

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \frac{p}{n+1} < \varepsilon\text{。}$$

5. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$，问级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛?

解　$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛。

反例：$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，$y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$，则$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$，但级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散。

6. 设$x_n \geq 0$，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，问交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$是否收敛?

解　$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 不一定收敛。

反例：$x_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n = 2k \\ \frac{1}{k^2} & n = 2k-1 \end{cases}$，则$x_n \geq 0$，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，但$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$发散。

7. 设正项数列$\{x_n\}$单调减少，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ 发散。问级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由。

解　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$收敛。

因为正项数列$\{x_n\}$单调减少，所以必定收敛。如果$\lim_{n\to\infty}x_n=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$是 Leibniz 级数，因此收敛，与条件矛盾，所以必定有$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha>0$，于是当$n$充分大时，$\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n<\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\right)^n$，因此$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$收敛。

8. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$收敛，则当$\alpha>\alpha_0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$也收敛。

证　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}})$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$收敛，$\left\{\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right\}$单调有界，利用 Abel 判别法，可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$收敛。

注　本题也可利用 Dirichlet 判别法证明。

9. 若$\{nx_n\}$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

证　令$a_n=x_n, b_n=1$，则$B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i=k$。利用 Abel 变换，得到

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=nx_n-\sum_{k=1}^{n-1}k(x_{k+1}-x_k)。$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(x_{n+1}-x_n)\cdot\frac{n}{n+1}]，$$

因为数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$收敛，由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)$收敛。再由数列$\{nx_n\}$的收敛性，即可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

10. 若$\sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$收敛。

**证** 由于$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$收敛,可知$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathrm{N}^+$：$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} y_k\right| < \varepsilon$。由于$\sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$绝对收敛，所以收敛,于是可知$\{x_n\}$有界。

设$\sum_{n=2}^{\infty}|x_n - x_{n-1}| = A$，$|x_n| \le B$，令$B_{n+k} = y_{n+1} + y_{n+2} + \cdots + y_{n+k}$，利用Abel变换，得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k y_k\right| = \left|x_{n+p}B_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(x_{k+1} - x_k)B_k\right| < (A+B)\varepsilon\text{。}$$

由 Cauchy 收敛原理，可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$收敛。

11．设$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0\text{。}$$

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

**证** 由$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$可知$f(0) = 0$，$f'(0) = 0$，于是

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} \quad (n\to\infty),$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

12．已知任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$发散，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$也发散。

**证** 采用反证法。令$y_n = (1+\frac{1}{n})x_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$收敛，因为$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，则由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y_n$收敛，与条件矛盾，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$发散。

13. 设$x_n>0$，$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)>0$，证明：交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$收敛。

**证** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\gamma>0$，首先可知当 $n$ 充分大时有 $x_n > x_{n+1}$，即数列 $\{x_n\}$ 当 $n$ 充分大时是单调减少的。然后取 $\alpha>0,\beta>0$，使得 $\gamma>\beta>\alpha>0$，可知当 $n$ 充分大时，成立

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}>1+\frac{\beta}{n}>(1+\frac{1}{n})^{\alpha}=\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}},$$

从而

$$(n+1)^{\alpha}x_{n+1}<n^{\alpha}x_n,$$

这说明数列 $\{n^{\alpha}x_n\}$ 当 $n$ 充分大时也是单调减少的，于是存在 $A>0$，使得 $n^{\alpha}x_n\le A$，即

$$0<x_n<\frac{A}{n^{\alpha}},$$

从而数列 $\{x_n\}$ 趋于零。因此交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 是 Leibniz 级数，所以收敛。

14. 利用

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \to \gamma \quad (n\to\infty),$$

其中 $\gamma$ 是 Euler 常数(见例 2.4.8)，求下述 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots。$$

**解**. 设 $b_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，设级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1},$$

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)+\frac{1}{2}(b_{2n}+\ln 2n)=b_{4n}+\ln 4n,$$

于是

$$S_{3n}=b_{4n}-\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}b_{2n}+\frac{3}{2}\ln 2\text{。}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\gamma$，得到

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{3}{2}\ln 2\text{。}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}\ln 2\text{。}$$

15. 利用级数的 Cauchy 乘积证明：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$；

(2) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}$ （$|q|<1$）。

解 （1）设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$，则 $c_0=1$，且当 $n\geq 1$ 时，

$$c_n=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^j}{i!\cdot j!}=\frac{1}{n!}\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\cdot j!}(-1)^j=\frac{1}{n!}(1-1)^n=0\text{，}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1\text{。}$$

（2）设 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$，则

$$c_n=\sum_{i+j=n}(q^iq^j)=(n+1)q^n\text{。}$$

又由于 $|q|<1$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$，从而得到

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}\ (|q|<1)\text{。}$$

# 习　题　9.5　无穷乘积

1. 讨论下述无穷乘积的敛散性

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$;

(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$;

(3) $\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$;

(4) $\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$;

(5) $\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}$;

(6) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$;

(7) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$;

(8) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$;

(9) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right]$;

(10) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$　（$p,q>0$）

解（1）
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right),$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$收敛。

（2）
$$\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}=\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1\right)\right],$$

$$\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1=\sqrt{1+\frac{2}{n-1}}-1\sim\frac{1}{n-1}\ (n\to\infty),$$

由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$发散，所以$\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$发散。

（3）
$$\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\prod_{n=3}^{\infty}(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}),$$

由于$\sum_{n=3}^{\infty}2\sin^2\frac{\pi}{2n}$收敛，所以$\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$收敛。

（4）
$$\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}=\prod_{n=1}^{\infty}[1-(1-n\sin\frac{1}{n})],$$

$$1-n\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{6n^2}\ (n\to\infty),$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2}$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$收敛。

（5）
$$\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\frac{1}{n^x}}-1\right)\right],$$

$$e^{\frac{1}{n^x}}-1 \sim \frac{1}{n^x}\ (n\to\infty),$$

当$x>1$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}$收敛；

当$x\le 1$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$发散，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}$发散。

（6）因为对任意$x$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2\pi^2}$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$收敛。

（7）当$|x|<2$时，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$收敛；

当$|x|\ge 2$时，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$发散，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$发散。

（8）
$$\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}-1\right)\right],$$

$$e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}-1 \sim \frac{1}{n^2}\ (n\to\infty),$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$收敛。

（9）
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1-\frac{x^2}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{2n^2}$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right]$收敛。

（10）
$$\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{2n^{2q}}+\cdots\right)=1+\frac{1}{n^p}-\frac{\pi^2}{2n^{2q}}+\cdots,$$

由此可知

当 $\min(p,2q)>1$ 时，$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ 收敛；

当 $\min(p,2q)\le 1$ 时，$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ 发散。

2. 计算下述无穷乘积的值：

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;　　(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$;

(3) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$。

解　(1)由于

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}。$$

(2)由于

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}==\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}。$$

(3)由于

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}==\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n-1)},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}。$$

3. 设 $0<x_n<\frac{\pi}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛。

证　设 $\cos x_n=1-\alpha_n$，则

$$0<\alpha_n=1-\cos x_n=2\sin^2\frac{x_n}{2}<\frac{1}{2}x_n^{\ 2},$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$收敛。

4. 设｜$a_n$｜＜$\frac{\pi}{4}$，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$绝对收敛。

**证**　由于$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，所以$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。设

$$\tan(\frac{\pi}{4}+a_n)=\frac{1+\tan a_n}{1-\tan a_n}=1+\alpha_n,$$

则

$$\alpha_n=\frac{2\tan a_n}{1-\tan a_n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{|a_n|}=2,$$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$绝对收敛。

5. 证明：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=0$；

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=0$ （$0<\beta<\alpha$）。

**证**　（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$，

由于

$$\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sim-\frac{1}{2n}\ (n\to\infty),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=-\infty,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)=-\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)=0。$$

（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)$，

由于

$$\ln\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)\sim-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\ (n\to\infty),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=-\infty,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=-\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=0。$$

6. 设｜$q$｜<1，证明：$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}$。

证　设$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+q^k)$，则

$$P_{2n}=\prod_{k=1}^{2n}(1+q^k)=\frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^k)}=\frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k})\cdot\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})}=\frac{\prod_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})},$$

由于$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$收敛，所以

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})=1,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}==\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}。$$

由于$\lim_{n\to\infty}P_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}P_{2n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}。$$

7. 设$a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}}$，$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$都发散，

但无穷乘积$\prod_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$收敛。

证　设$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

由于$\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\sim\frac{1}{k}\ (k\to\infty)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=+\infty,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；又由于$a_n^2\geq\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$也发散。

设 $P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$，则

$$P_{2n}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}(1+\frac{1}{\sqrt{k}})\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

所以 $\lim_{n\to\infty}P_{2n}$ 存在且非零。由于

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}P_{2n},$$

所以 $\lim_{n\to\infty}P_n$ 存在且非零，即无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。

# 第十章 函数项级数

## 习 题 10.1 函数项级数的一致收敛性

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性。

⑴ $S_n(x) = e^{-nx}$， (i) $x\in(0,1)$， (ii) $x\in(1,+\infty)$；

⑵ $S_n(x) = x e^{-nx}$， $x\in(0,+\infty)$；

⑶ $S_n(x) = \sin\frac{x}{n}$， (i) $x\in(-\infty,+\infty)$， (ii) $x\in[-A,A]$ ($A>0$)；

⑷ $S_n(x) = \arctan nx$， (i) $x\in(0,1)$， (ii) $x\in(1,+\infty)$；

⑸ $S_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

⑹ $S_n(x) = nx(1-x)^n$， $x\in[0,1]$；

⑺ $S_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$， (i) $x\in(0,1)$， (ii) $x\in(1,+\infty)$)；

⑻ $S_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$， (i) $x\in(0,1)$， (ii) $x\in(1,+\infty)$；

⑼ $S_n(x) = (\sin x)^n$， $x\in[0,\pi]$；

⑽ $S_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$， (i) $x\in[0,\pi]$， (ii) $x\in[\delta,\pi-\delta]$ （$\delta>0$）；

⑾ $S_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$， (i) $x\in(0,+\infty)$， (ii) $x\in(0,A]$ ($A>0$)；

⑿ $S_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$， (i) $x\in(0,+\infty)$， (ii) $x\in[\delta,+\infty)$, $\delta>0$。

解 （1）(i) $S(x)=0$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=1 \not\longrightarrow 0 \ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=0$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(1,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=e^{-n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛。

（2） $S(x)=0$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{1}{ne}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛。

（3）(i) $S(x)=0$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=1 \not\to 0 \ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=0$，当$n>\frac{2A}{\pi}$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[-A,A]}\left|S_n(x)-S(x)\right|\le\frac{A}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[-A,A]$上一致收敛。

（4）(i) $S(x)=\frac{\pi}{2}$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{\pi}{2} \not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=\frac{\pi}{2}$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(1,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan n\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛。

（5）$S(x)=|x|$，由于$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\le\frac{1}{n}$，于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（6）$S(x)=0$，

$$S_n(\frac{1}{n})-S(\frac{1}{n})=(1-\frac{1}{n})^n \not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛。

（7）(i) $S(x)=0$，由于$S_n(0+)-S(0+)=0$，且

$$\frac{d}{dx}\left[S_n(x)-S(x)\right]=\frac{1}{n}(1+\ln\frac{x}{n})<0 \quad (n\ge 2)\text{，}$$

于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{\ln n}{n}\to 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上一致收敛。

(ii) $S(x)=0$，

$$S_n(2n)-S(2n)=2\ln 2 \not\to 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛。

（8）(i) $S(x)=0$，

$$S_n(1-\frac{1}{n})-S(1-\frac{1}{n})=\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1+(1-\frac{1}{n})^n} \not\to 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=1$，

$$S_n(1+\frac{1}{n})-S(1+\frac{1}{n})=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{1+(1+\frac{1}{n})^n}-1 \not\to 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛。

（9）$S(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{\pi}{2}\\ 0 & x\in[0,\pi],x\ne\frac{\pi}{2}\end{cases}$，取$x_n\in[0,\pi]$，使得$\sin x_n=1-\frac{1}{n}$，则$x_n\ne\frac{\pi}{2}$，

$$S_n(x_n)-S(x_n)=(1-\frac{1}{n})^n \not\to 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,\pi]$上非一致收敛。

（10）(i) $S(x)=\begin{cases}0 & x=0,\pi\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$，取$x_n\in(0,\pi)$，使得$\sin x_n=\frac{1}{2^n}$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=\frac{1}{2}-1 \not\longrightarrow 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,\pi)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=1$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[\delta,\pi-\delta]}|S_n(x)-S(x)|=1-\sin^{\frac{1}{n}}\delta\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[\delta,\pi-\delta]$上一致收敛。

（11）(i) $S(x)=e^x$，

$$S_n(n)-S(n)=2^n-e^n \not\longrightarrow 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=e^x$，由于$S_n(0+)-S(0+)=0$，且当$n$充分大时，

$$\frac{d}{dx}[S_n(x)-S(x)]=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}-e^x<0,$$

于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,A]}|S_n(x)-S(x)|=e^A-\left(1+\frac{A}{n}\right)^n\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,A]$上一致收敛。

（12）(i) $S(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，

$$S_n(\frac{1}{n})-S(\frac{1}{n})=\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\sqrt{n} \not\longrightarrow 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，

$$S_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}=S(x),$$

由于

$$\frac{d}{dx}\left[S_n(x)-S(x)\right]=\frac{-1}{2\sqrt{x(x+\frac{1}{n})}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}})}+\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}>0,$$

可知

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[\delta,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|S_n(\delta)-S(\delta)\right|$$

$$=-n\left(\sqrt{\delta+\frac{1}{n}}-\sqrt{\delta}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\delta}}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

2. 设$S_n(x) = n(x^n - x^{2n})$，则函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛但不一致收敛，且极限运算与积分运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x。$$

**证** 函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛于$S(x)=0$。取$x_n=1-\frac{1}{n}$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=n\left[(1-\frac{1}{n})^n-(1-\frac{1}{n})^{2n}\right]\to+\infty,$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛。

由于

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(x^n-x^{2n})\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad \int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x。$$

3. 设$S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$，则

(1) 函数序列$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛；

(2) $\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛；

(3) 极限运算与求导运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

并不对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立。

**解** (1) $S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$，$S(x)=0$，则

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|\le\frac{1}{2n}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（2） $\frac{d}{dx}S_n(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$， $\sigma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$，

取$x_n=\frac{1}{2n}$，则

$$\frac{d}{dx}S_n(x_n)-\sigma(x_n)=\frac{12}{25}\not\to 0\ （n\to\infty），$$

所以$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x)\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛。

（3）由于在$x=0$处，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0，\ \sigma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=1，$$

所以在$x=0$处，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

不成立。

4. 设$S_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n$，则函数序列$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛；试问极限运算与求导运算能否交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

是否成立?

解 $S_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n$， $S_n'(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0，\ S'(x)=0，$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(1)=\frac{1}{2}\neq S'(1)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

在$x=1$不成立。

5. 设$S_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$，其中$a$是参数。求$a$的取值范围，使得函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上

⑴ 一致收敛；

⑵ 积分运算与极限运算可以交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x；$$

⑶ 求导运算与极限运算可以交换，即对一切$x\in[0,1]$成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)\ 。$$

解　(1) $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0$，令 $S_n^{'}(x)=n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)=0$，得到 $x=\frac{1}{n}$，即

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[0,1]}\left|S_n(x)-S(x)\right|=S_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1},$$

所以 $\lim_{n\to\infty}d(S_n,S)=0$ 当且仅当 $\alpha<1$ 时成立，所以当 $\alpha<1$ 时，$\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

(2) $\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 S(x)dx=0$，$\int_0^1 S_n(x)dx=n^{\alpha-2}-n^{\alpha-1}(1+\frac{1}{n})e^{-n}$，

所以当且仅当 $\alpha<2$ 时，成立.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x。$$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)$，

由于

$$\lim_{n\to\infty}e^{-nx}(1-nx)=\begin{cases}0 & x\in(0,1]\\ 1 & x=0\end{cases},$$

所以当且仅当 $\alpha<0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

对一切 $x\in[0,1]$ 成立。

6. 设 $S'(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上连续，

$$S_n(x)=n\left[S\left(x+\frac{1}{n}\right)-S(x)\right],$$

证明：$\{S_n(x)\}$ 在 $(a,b)$ 上内闭一致收敛于 $S'(x)$。

解　显然 $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S'(x)$，所以只须证明 $\forall\eta>0$，$\{S_n(x)\}$ 在 $[a+\eta,b-\eta]$ 上一致收敛于 $S'(x)$。

取 $0<\alpha<\eta$，则 $S'(x)$ 在 $[a+\alpha,b-\alpha]$ 上一致连续，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in[a+\alpha,b-\alpha]$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就成立

$$|S'(x')-S'(x'')|<\varepsilon。$$

取 $N=\max\left\{\left[\frac{1}{\delta}\right],\left[\frac{1}{\eta-\alpha}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 且 $x\in[a+\eta,b-\eta]$ 时，有

$$x+\frac{1}{n}\in[a+\alpha,b-\alpha],$$

于是

$$\left|S_n(x)-S'(x)\right|=\left|S'(\xi)-S'(x)\right|<\varepsilon,$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(a,b)$上内闭一致收敛于$S'(x)$。

7. 设$S_0(x)$在$[0,a]$上连续，令

$$S_n(x)=\int_0^x S_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t,\qquad n=1,2,\cdots。$$

证明：$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于 0。

**证** 设$\left|S_0(x)\right|\le M$，则

$$\left|S_1(x)\right|=\left|\int_0^x S_0(t)dt\right|\le Mx,$$

$$\left|S_2(x)\right|=\left|\int_0^x S_1(t)dt\right|\le\int_0^x Mtdt=M\frac{x^2}{2!},$$

$\cdots$

$$\left|S_n(x)\right|=\left|\int_0^x S_{n-1}(t)dt\right|\le\int_0^x M\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt=M\frac{x^n}{n!},$$

$\cdots$

由于

$$M\frac{x^n}{n!}\le M\frac{a^n}{n!},\quad \lim_{n\to\infty}(M\frac{a^n}{n!})=0,$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于 0。

8. 设$S(x)$在$[0,1]$上连续，且$S(1)=0$。证明：$\{x^n S(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。

**证** $S(x)$在$[0,1]$上连续，所以有界，设$\left|S(x)\right|\le M$。 由$S(1)=0$，可知

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall x\in[1-\delta,1]，成立\left|x^n S(x)\right|<\varepsilon。$$

由于$\{x^n\}$在$[0,1-\delta]$上一致收敛于零，可知

$$\exists N,\quad \forall n>N,\ \forall x\in[0,1-\delta]，成立\ \left|x^n\right|<\frac{\varepsilon}{M},$$

于是

$$\left|x^n S(x)\right|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[0,1]$ 成立，因此 $\{x^n S(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

## 习 题 10.2 一致收敛级数的判别与性质

1. 讨论下列函数项级数在所指定区间上的一致收敛性。

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^{n}$， $x\in[0,1]$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^{2}x^{n}$， $x\in[0,1]$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{3}\mathrm{e}^{-nx^{2}}$， $x\in[0,+\infty)$；

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}x\,\mathrm{e}^{-nx^{2}}$， (i) $x\in[0,+\infty)$， (ii) $x\in[\delta,+\infty)$（$\delta>0$）；

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{1+n^{3}x^{2}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^{4}+x^{4}}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(1-x)x^{n}$， $x\in[0,1]$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+x^{2}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

(9) $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}\sin\frac{1}{3^{n}x}$， (i) $x\in(0,+\infty)$，(ii) $x\in[\delta,+\infty)$（$\delta>0$）；

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

(11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2}}{(1+x^{2})^{n}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

(12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2}}{(1+x^{2})^{n}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$。

解（1） $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^{k}=1-x^{n+1}$，

由于$\{x^{n+1}\}$在$[0,1]$非一致收敛，所以$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^{n}$在$[0,1]$上非一致收敛。

（2）设$u_n(x)=(1-x)^{2}x^{n}$，则在$[0,1]$上

$$0\le u_n(x)\le u_n\left(\frac{n}{n+2}\right)<\frac{4}{(n+2)^{2}},$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(n+2)^{2}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^{2}x^{n}$在$[0,1]$上一致

收敛。

（3）设$u_n(x)=x^3e^{-nx^2}$，则当$n\ge 1$时，在$[0,+\infty)$上

$$0\le u_n(x)\le u_n(\sqrt{\frac{3}{2n}})=\frac{K}{n^{\frac{3}{2}}},$$

其中$K=\frac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}$。由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{K}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^3\mathrm{e}^{-nx^2}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛。

（4）(i) 设$u_n(x)=xe^{-nx^2}$，对任意的正整数 $N$，取$m=2n\ (n>N)$与$x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\in[0,+\infty)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x_n)=x_ne^{-(n+1)x_n^2}+x_ne^{-(n+2)x_n^2}+\cdots+x_ne^{-2nx_n^2}>nx_ne^{-2nx_n^2}$$
$$=\sqrt{n}e^{-2}\to+\infty\ (n\to\infty),$$

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x\mathrm{e}^{-nx^2}$ 不满足 Cauchy 收敛原理的条件，由此可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x\mathrm{e}^{-nx^2}$ 在$[0,+\infty)$上非一致收敛；

(ii) 设$u_n(x)=xe^{-nx^2}$，则当$n>\frac{1}{2\delta^2}$时，$u_n(x)$关于$x$在$[\delta,+\infty)$上单调减少，所以

$$0\le u_n(x)\le\delta e^{-\delta^2 n},$$

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta e^{-\delta^2 n}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x\mathrm{e}^{-nx^2}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

（5）设$u_n(x)=\frac{x}{1+n^3x^2}$，则当$n\ge 1$时，$|u_n(x)|\le\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（6）设$u_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，则当$n\ge 1$时，$|u_n(x)|\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，

由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（7）设$a_n(x)=(1-x)x^n$，$b_n(x)=(-1)^n$，则$\{a_n(x)\}$对固定的$x\in[0,1]$关于$n$是单调的，且在$[0,1]$上一致收敛于零，同时$\left|\sum_{k=0}^{n}b_k(x)\right|\le 1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在$[0,1]$上一致收敛。

（8）设$a_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$，$b_n(x)=(-1)^n$，则$\{a_n(x)\}$对固定的$x\in(-\infty,+\infty)$关于$n$是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\le 1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（9）(i) 设$u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，取$x_n=\frac{2}{3^n\pi}\in(0,+\infty)$，则

$$u_n(x_n)=2^n\to+\infty,$$

即$\{u_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛，所以$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛；

(ii) 设$u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，则当$x\in[\delta,+\infty)$时，

$$|u_n(x)|\le\frac{1}{\delta}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

（10）设$a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n(x)=\sin x\sin nx$，由于$a_n(x)$与$x$无关且单调趋于

零，所以$\{a_n(x)\}$对固定的$x\in(-\infty,+\infty)$关于$n$是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\cos(n+\frac{1}{2})x-\cos\frac{x}{2}\right| \le 2，$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（11）设$u_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，取$\varepsilon_0=\frac{1}{e^2}>0$，对任意的正整数 $N$，取$m=2n\ (n>N)$与$x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\in(-\infty,+\infty)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x_n)=\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+1}}+\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+2}}+\cdots+\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}}>\frac{nx_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}}>\frac{1}{e^2}=\varepsilon_0，$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$不满足Cauchy收敛原理的条件，由此可知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛。

（12）设$a_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$b_n(x)=(-1)^n$，则$\{a_n(x)\}$对固定的$x\in(-\infty,+\infty)$关于$n$是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\le 1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

2. 证明：函数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续，且有连续的导函数。

证　由于$\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right|\le\frac{1}{n^2+1}$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛，由 Weierstraass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上一致收敛，所以$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续。

设$\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\cos nx}{n^2+1})'=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$，由于$\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$单调趋于零，且对任意的$0<\delta<\pi$，当$x\in[\delta,2\pi-\delta]$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}，$$

由 Dirichlet 判别法，可知 $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛，即 $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛，因此 $\sigma(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在$(0,2\pi)$上连续。再由逐项求导定理，可知 $f'(x)=\sigma(x)$ 在$(0,2\pi)$上成立，即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在$(0,2\pi)$上有连续的导函数。

3. 证明：函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导函数。

**证** 对任意的 $0<a<A<+\infty$，当 $x\in[a,A]$，成立 $0<ne^{-nx}\le ne^{-an}$，且 $\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-an}$ 收敛，由 Weierstraass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

设 $\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(ne^{-nx})'=-\sum_{n=0}^{\infty}n^2e^{-nx}$，与上面类似可证明 $-\sum_{n=0}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，因此 $\sigma(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。再由逐项求导定理，可知 $f'(x)=\sigma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数。

注意到 $(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k+1}e^{-nx}\ (k=1,2,\cdots)$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是内闭一致收敛的，所以上述过程可以逐次进行下去，由数学归纳法，可知 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有各阶连续导函数。

4. 证明：函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在$(1,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导函数；函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导函数。

**证** 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，对任意 $1<a<A<+\infty$，当 $x\in[a,A]$，成立 $0<\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^a}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ 收敛，由 Weierstraass 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续。

又 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n^x}\right)=-\frac{\ln n}{n^x}$，且对任意 $1<a<A<+\infty$，$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在 $[a,A]$ 上一致收

敛，即$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛，则$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上连续。由逐项求导定理，可知$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$，即$f(x)$在$(1,+\infty)$上有连续导函数。

利用$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{n^x}\right)=(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}\ (k=1,2,\cdots)$，可以证明$(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛，同理可得$f(x)$在$(1,+\infty)$上有各阶连续导函数。

设$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$，由 Dirichlet 判别法，可知对任意$0<a<A<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$[a,A]$上一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，所以$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上连续。

又$\frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$，同样由 Dirichlet 判别法，可知对任意$0<a<A<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$[a,A]$上一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上连续。由逐项求导定理，可知$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$，即$g(x)$在$(0,+\infty)$上有连续导函数。

利用$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=\frac{(-1)^{n+k}\ln^k n}{n^x}\ (k=1,2,\cdots)$，同样由 Dirichlet 判别法，可以证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}\ln^k n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，同理可得$g(x)$在$(0,+\infty)$上有各阶连续导函数。

5. 证明：函数项级数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$可以逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan\frac{x}{n^2})。$$

证　函数项级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 收敛，且

$$\frac{d}{dx}(\arctan\frac{x}{n^2})=\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}},$$

由于 $\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}\le\frac{1}{n^2}$，由 Weierstraass 判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(\arctan\frac{x}{n^2})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，再由逐项求导定理，即可知道

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\arctan\frac{x}{n^2})。$$

6. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：

(1) $\lim_{x\to0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$；　　(2) $\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$。

证　(1) 首先对于每一固定的 $x\in[0,\delta)$ $(\delta>0)$，$\frac{1}{n^x}$ 关于 $n$ 单调，且对于一切 $x\in[0,\delta)$ 与一切 $n$，成立 $0<\frac{1}{n^x}\le1$，又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是数项级数，它的收敛意味着关于 $x$ 的一致收敛性，于是由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,\delta)$ 上一致收敛，因此和函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 关于 $x$ 在 $[0,\delta)$ 连续，从而成立

$$\lim_{x\to0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n。$$

(2) 由例题 10.2.4，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，再由逐项积分定理，得到

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}。$$

7. 设 $u_n(x)$，$v_n(x)$ 在区间 $(a,b)$ 连续，且 $|u_n(x)|\le v_n(x)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^+$

成立。证明：若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$(a,\ b)$上点态收敛于一个连续函数，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$也必然收敛于一个连续函数。

**证**　设任意闭区间$[c,d]\subset(a,b)$。由于$v_n(x)\ge 0$在$[c,d]$连续，和函数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$[c,d]$连续，则由 Dini 定理可知$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$[c,d]$一致收敛。于是由 Cauchy 收敛原理，可知$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall m>n>N$，$\forall x\in[c,d]$，成立

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_m(x)\right|\le v_{n+1}(x)+v_{n+2}(x)+\cdots+v_m(x)<\varepsilon,$$

此即说明$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[c,d]$一致收敛，因此$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[c,d]$连续。由于$[c,d]\subset(a,b)$的任意性，即得到$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,b)$连续。

8. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x=a$与$x=b$收敛，且对一切$n\in\mathbf{N}^+$，$u_n(x)$在闭区间$[a,b]$上单调增加，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛。

**证**　由于$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x=a$与$x=b$收敛，由 Cauchy 收敛原理，可知

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall m>n>N,\ \text{成立}\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(a)\right|<\varepsilon\ \text{与}\ \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(b)\right|<\varepsilon。$$

再由$u_n(x)$在$[a,b]$上的单调增加性，可知对一切$x\in[a,b]$，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right|\le\max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(a)\right|,\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(b)\right|\right\}<\varepsilon,$$

此即说明$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛。

9. 设对一切$n\in\mathbf{N}^+$，$u_n(x)$在$x=a$右连续，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x=a$发散，证明：对任意$\delta>0$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,a+\delta)$上必定非一致收敛。

证 采用反证法。设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,a+\delta)$上一致收敛，则

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N，\ \forall x\in(a,a+\delta)，成立\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

再令$x\to a+$,得到$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，这说明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$x=a$收敛，与条件矛盾，所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a, a+\delta)$上必定非一致收敛。

10．证明函数项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上是一致收敛的，其中$a$是小于$2\ln^2 2$的任意固定正数。

证 $\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上单调增加，所以

$$\ln\left(1-\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\le\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\le\ln\left(1+\frac{a}{n\ln^2 n}\right),$$

$$\ln\left(1\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\sim\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\ (n\to\infty)。$$

由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a}{n\ln^2 n}$收敛，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\right)$收敛，再由习题 8 可知$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上一致收敛。

11．设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}。$$

（1）证明：$f(x)$在$[0,\pi/2]$上连续；

（2）计算$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$。

解 （1）对一切$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，有

$$0\le\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\le\frac{1}{2^n},$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，由 Weierstraass 判别法，可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上一致收敛，从而$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[0,\frac{\pi}{2}]$连续。

（2）由（1），$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上一致收敛，由逐项积分定理，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2^n}d\frac{x}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\ln\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}}{\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}},$$

再利用例题 9.5.3 的结果$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$，得到

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)=\ln\frac{3}{2}。$$

12．设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$。

（1） 证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续；

（2）记$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，证明：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

证 （1）对一切$x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由 Weierstraass 判别法，可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，所以$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上连续；

（2）由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，由逐项积分定理，

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos nt}{\sqrt{n^3+n}}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n^3+n}},$$

于是

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+n}}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{(2n-1)^3+(2n-1)}},$$

这是一个 Leibniz 级数，它的前两项为$\frac{\sqrt{2}}{2}$与$-\frac{1}{3\sqrt{30}}$，所以

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3\sqrt{30}}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

13．设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$。

（1） 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且一致连续；

（2） 证明反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

证 （1）由 $\frac{1}{2^n+x}\le\frac{1}{2^n}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上点态收敛；又 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2^n+x}\right)=\frac{-1}{(2^n+x)^2}$，且对一切 $x\in[0,+\infty)$，$\left|\frac{-1}{(2^n+x)^2}\right|\le\frac{1}{2^{2n}}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2^n+x}\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。由逐项求导定理，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导。

由于

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_2}\right|\le\left|x_1-x_2\right|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n},$$

可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

（2） $$\int_0^A f(x)dx=\int_0^A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}\right)dx>\sum_{k=0}^{n}\int_0^A\frac{dx}{2^k+x}=\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{A}{2^k}\right),$$

由于 $\lim\limits_{A\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{A}{2^k}\right)=+\infty$，可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx=+\infty$，所以反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

# 习 题 10.3 幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$；

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$。

解（1）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3$，所以收敛半径为 $R=\frac{1}{3}$。

当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{2}{3})^n]$，级数发散。

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[(-1)^n+(\frac{2}{3})^n]$，级数收敛。

所以收敛区域为 $D=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

（2）设$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$，所以收敛半径为 $R=1$。

当 $x=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，级数发散。

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，通项不趋于零，级数也发散。

所以收敛区域为 $D=(0,2)$。

（3）设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以收敛半径为$R=\sqrt{2}$。

当$x=\pm\sqrt{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，级数收敛。

所以收敛区域为$D=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$。

（4）设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$，所以收敛半径为$R=1$　。

当$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$是 Leibniz 级数，所以收敛。

当$x=-2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，级数发散。

所以收敛区域为$D=(-2,0]$。

（5）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot 2^n}{3^n}\right]=0$，所以收敛半径为$R=+\infty$，收敛区域为$D=(-\infty,+\infty)$。

（6）设$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{\ln^2 n}{n^n}}=1$，所以收敛半径为$R=1$。

当$x=\pm 1$时，显然$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$收敛，所以收敛区域为$D=[-1,1]$。

（7）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right]=\frac{1}{e}$，所以收敛半径为$R=e$。

当$x=\pm e$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$，应用 Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\ (n\to\infty),$$

可知级数的通项$\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$不趋于零，因而发散。

所以收敛区域为$D=(-e,e)$。

（8）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]=\frac{1}{4}$，所以收敛半径为$R=4$。

当$x=\pm 4$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$，应用 Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\ (n\to\infty),$$

可知级数的通项$\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$不趋于零，因而发散。

所以收敛区域为$D=(-4,4)$。

（9）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right]=1$，所以收敛半径为$R=1$。

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$是 Leibniz 级数，所以收敛。

当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，令$b_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，$\lim_{n\to\infty}n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)=\frac{1}{2}$，由 Raabe 判别法可知级数发散。

所以收敛区域为$D=[-1,1)$。

2. 设$a>b>0$，求下列幂级数的收敛域。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$；

（3）$a x+b x^2+a^2 x^3+b^2 x^4+\cdots+a^n x^{2n-1}+b^n x^{2n}+\cdots$。

解（1）$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)}=a$，所以收敛半径为$R=\frac{1}{a}$。

当$x=-\frac{1}{a}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{b^n(-1)^n}{n^2a^n}\right)$，级数收敛。

当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{b^n}{n^2a^n}\right)$，级数发散。

所以收敛区域为 $D=\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$。

（2）$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^n}}=\frac{1}{a}$，所以收敛半径为 $R=a$。

当 $x=\pm a$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ 的通项不趋于零，级数发散，所以收敛区域为 $D=(-a,a)$。

（3）设 $a\,x+b\,x^2+a^2\,x^3+b^2\,x^4+\cdots+a^n\,x^{2n-1}+b^n\,x^{2n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$，则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{a^n}=\sqrt{a}$，所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\sqrt{a}}$。

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 的通项不趋于零，级数发散，所以收敛区域为 $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$。

3. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$，讨论下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$；　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$。

解　（1）设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 $R$。

当 $|x|<\sqrt{R_1}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 收敛，当 $|x|>\sqrt{R_1}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 发散，所以 $R=\sqrt{R_1}$。

（2）设 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R$。

当$|x|<\min(R_1,R_2)$时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$收敛。

当$|x|>\min(R_1,R_2)$，$R_1\neq R_2$时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$发散。

但当$R_1=R_2$时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$的收敛半径有可能增加，例如$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，收敛半径为1，$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)x^n$收敛半径也为1，但$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$的收敛半径为2。

所以$R\geq\min(R_1,R_2)$。

（3）设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$的收敛半径为$R$。

由$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}$，可知$R\geq R_1R_2$。

上式等号可能不成立，例如$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$，收敛半径为1，

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$，收敛半径也为1，但$\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$的收敛半径为$R=+\infty$。

4. 应用逐项求导或逐项求积分等性质，求下列幂级数的和函数，并指出它们的定义域。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$；

(6) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$。

解 （1）级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm1$时，级数发散，所以定义域为$D=(-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，$f(x)=\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，利用逐项求积分，得到

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

所以

$$S(x) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}。$$

（2）级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm 1$时，级数发散，所以定义域为$D=(-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$， $f(x)=xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，利用逐项求导，得到

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$

所以

$$S(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}。$$

（3）级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm 1$时，级数发散，所以定义域为$D=(-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$， $f(x)=\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}$，利用逐项求积分与上面习题（1)，得到

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n = \frac{x}{(1+x)^2},$$

所以

$$S(x) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}。$$

（4）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm 1$时，级数收敛，所以

定义域为 $D=[-1,1]$。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$， $f(x)=xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，利用逐项求导，得到

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

于是 $f'(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)$，所以

$$S(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f'(x)dx=1-(1-\frac{1}{x})\ln(1-x),\quad x\in[-1,1),$$

而 $S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$。注意 $S(1)$ 也可利用 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的连续性，由极限 $S(1)=\lim\limits_{x\to1-}S(x)=1$ 得到。

（5）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$， $f(x)=\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，利用逐项求积分与上面习题（1），得到

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}-1,$$

所以

$$S(x)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)=\frac{2x}{(1-x)^3}。$$

（6）级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，所以定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$。

设 $S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，由 $S(x)+S'(x)=e^x$ 与 $S(x)-S'(x)=e^{-x}$，即可得到

$$S(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})。$$

（7）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$的收敛半径为$R=+\infty$，所以定义域为$D=(-\infty,+\infty)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，则$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x(e^x-1)$，所以

$$S(x)=\frac{d}{dx}\left[x(e^x-1)\right]=(1+x)e^x-1。$$

**注** 本题也可直接利用例题 10.3.6，得到

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=(1+x)e^x-1。$$

5. 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则不论$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=r$是否收敛，只要$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在$x=r$收敛，就成立

$$\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1},$$

并由此证明：

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}。$$

**证** 由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在$x=r$收敛，可知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径至少为$r$，所以$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径也至少为$r$。当$x\in[0,r)$， 利用逐项积分，得到

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}。$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$收敛，可知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在$[0,r]$连续，令$x\to r-$，得到

$$\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}。$$

对$f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}$利用上述结果，就得到

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{dx}{x}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}。$$

6. 证明：

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$；

(2) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$。

证 （1）连续 4 次逐项求导，得到

$$y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y。$$

（2）应用逐项求导，可得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!}，\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!n!}，$$

于是

$$xy''+y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!n!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{[(n-1)!]^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=y。$$

7. 应用幂级数性质求下列级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}$；

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$；

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}$；

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$；

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}$。

解 （1）设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$，利用逐项求积分可得

$$g(x)=\frac{1}{(1+x)^2}，\quad 于是\quad f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=f(\frac{1}{2})=\frac{2}{9}。$$

（2）设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，利用逐项求导可得

$$f(x)=\ln\frac{1}{1-x},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=f(\frac{1}{2})=\ln 2。$$

（3）首先由逐项求积分可得 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$。设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n+1}$，

再利用逐项求积分，得到

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}=\frac{x^3}{(1-x)^2},$$

于是

$$f(x)=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}=f(\frac{1}{4})=\frac{11}{27}。$$

（4）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$，利用逐项求积分可得

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},$$

于是

$$f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}=f(\frac{1}{2})=12。$$

（5）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$，令 $g(x)=xf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，利用逐项求导可得

$$g(x)=\arctan x,$$

于是

$$f(x)=\frac{\arctan x}{x},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}=f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi。$$

（6）首先由逐项求导可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln(1+x)$。设 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^n$，令 $g(x)=xf(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^{n+1}$，则

$$g'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+1}=x\ln(1+x),$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\ln(1+x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2},$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}=f(\frac{1}{2})=\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}。$$

（7）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=e^{-x},$$

因此 $f(x)=xg(x)=xe^{-x}$。所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}=f(2)=\frac{2}{e^2}。$$

8．设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0$，求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径。

解　设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R_1$，$\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$的收敛半径为$R_2$。由

$0\le a_n\le A_n$，可知$R_1\ge R_2$；又由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，可知$R_1\le 1$。

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{A_{n+1}}=1,$$

可知$R_2=1$。结合上述关系，得到$R_1=1$。

9．设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$。

（1）证明$f(x)$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上连续，在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上可导；

（2）$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$处的左导数是否存在？

证　（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$的收敛半径为$R=\frac{1}{2}$，且在$x=\pm\frac{1}{2}$，级数收敛，由 Abel 第二定理，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上一致收敛，所以$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上连续。

由于$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^n}{n^2}x^n\right)=\frac{2^n}{n}x^{n-1}$，且对任意$\delta>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\delta\right]$上一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上内闭一致收敛，由函数项级数的逐项求导定理，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上可导，且$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$。

（2）$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$处的左导数不存在。

令$t=2x$，则$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$。令$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$。利用逐项求导

定理，可以得到

$$g(t)=\int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{u}du\text{，}$$

其中$t\in[-1,1]$。应用 L'Hospital 法则，得到

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to 1-}\frac{2}{t-1}\left[\int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{u}du-\int_0^1 -\frac{\ln(1-u)}{u}du\right]$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{2}{t-1}\int_1^t -\frac{\ln(1-u)}{u}du=\lim_{t\to 1-}-\frac{2\ln(1-t)}{t}=+\infty\text{。}$$

# 习　题　10.4　函数的幂级数展开

1. 求下列函数在指定点的 Taylor 展开，并确定它们的收敛范围：

(1) $1 + 2x - 3x^2 + 5x^3$，$x_0 = 1$;　　(2) $\dfrac{1}{x^2}$，$x_0 = -1$;

(3) $\dfrac{x}{2-x-x^2}$，$x_0 = 0$;　　(4) $\sin x$，$x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

(5) $\ln x$，$x_0 = 2$;　　(6) $\sqrt[3]{4-x^2}$，$x_0 = 0$;

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}$，$x_0 = 1$;　　(8) $(1+x)\ln(1-x)$，$x_0 = 0$;

(9) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$，$x_0 = 0$;　　(10) $\dfrac{e^{-x}}{1-x}$，$x_0 = 0$。

解（1）令 $x-1=t$，则

$$1 + 2x - 3x^2 + 5x^3 = 1+2(t+1)-3(t+1)^2+5(t+1)^3$$

$$=5+11t+12t^2+5t^3=5+11(x-1)+12(x-1)^2+5(x-1)^3\text{。}$$

因为级数只有有限项，所以收敛范围是 $D=(-\infty,+\infty)$。

（2）由 $\dfrac{-1}{x}=\dfrac{1}{1-(x+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$，应用逐项求导得到

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n\text{。}$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=-2$ 与 $x=0$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-2,0)$。

（3）

$$\frac{x}{2-x-x^2}=\frac{x}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2+x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]x^n\text{。}$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

（4）

$$\sin x=\sin[(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\sin\frac{\pi}{6}\cos(x-\frac{\pi}{6})+\cos\frac{\pi}{6}\sin(x-\frac{\pi}{6})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{6})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{6})^{2n+1}\text{。}$$

级数的收敛半径为 $R=+\infty$，所以收敛范围是 $D=(-\infty,+\infty)$。

（5） $$\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n\text{。}$$

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=4$ 时，级数为 $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，收敛；当 $x=0$ 时，级数为 $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$，发散。所以收敛范围是 $D=(0,4]$。

（6） $$\sqrt[3]{4-x^2}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt[3]{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^{2n}\text{。}$$

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=\pm 2$ 时，级数为 $\sqrt[3]{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{3}}{n}$，令 $u_n=(-1)^n\binom{\frac{1}{3}}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3(n+1)}{3n-1}-1\right)=\frac{4}{3}>1,$$

由 Raabe 判别法，级数收敛。所以收敛范围是 $D=[-2,2]$。

（7） $$\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{x-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(x-1)^n\text{。}$$

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=3$ 与 $x=-1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,3)$。

（8） $$(1+x)\ln(1-x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}x^n)=-x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)x^n\text{。}$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=1$ 时，级数发散；当 $x=-1$ 时，级数收敛。所以收敛范围是 $D=[-1,1)$。

（9） $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{1}{n}x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\text{。}$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

（10） $\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\right)x^n$。

设级数的 $x^n$ 项的系数为 $a_n$，则

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}<a_n<\frac{1}{2!}\quad(n\ge4)\text{，}$$

所以级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm1$ 时，级数的通项不趋于零，级数发散。所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

2. 求下列函数在 $x_0=0$ 的Taylor展开

(1) $\dfrac{x}{\sin x}$ 至 $x^4$；　　(2) $e^{\sin x}$ 至 $x^4$；

(3) $\ln\cos x$ 至 $x^6$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 至 $x^4$。

解 (1) $\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{x}{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots}=\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)}$

$$=1+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\cdots\text{。}$$

(2) $e^{\sin x}=1+\sin x+\dfrac{1}{2}\sin^2 x+\dfrac{1}{6}\sin^3 x+\dfrac{1}{24}\sin^4 x+\cdots$

$$=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^3$$

$$+\frac{1}{24}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^4+\cdots=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots。$$

(3) $\ln\cos x=\ln[1-(1-\cos x)]=-(1-\cos x)-\frac{1}{2}(1-\cos x)^2-\frac{1}{3}(1-\cos x)^3-\cdots$

$$=-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^3-\cdots$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{7}{240}x^6-\cdots。$$

(4) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sqrt{1+2(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)}=1+(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)$

$$-\frac{1}{2}(x+x^2+x^3+\cdots)^2+\frac{1}{2}(x+x^2+\cdots)^3-\frac{15}{24}(x+\cdots)^4$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots。$$

3. 利用幂级数展开，计算下列积分，要求精确到 0.001。

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^1\cos x^2\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$； (4) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$。

解 (1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\,\mathrm{d}x$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n=\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}$，由于 $u_3\approx0.00003$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}\approx$$

(2) $\int_0^1\cos x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}\,\mathrm{d}x$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n=\frac{1}{(2n)!(4n+1)}$，由于 $u_3\approx0.0001$，因此前面 4 项之和的小数部分具

有三位有效数字，所以

$$\int_0^1 \cos x^2 \,\mathrm{d}\,x \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} \approx$$

(3) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} \,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \,\mathrm{d}\,x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}$，由于 $u_3 \approx 0.00016$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} \,\mathrm{d}\,x \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \approx$$

(4) $$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^3} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \int_2^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n = \frac{1}{(3n-1)2^{3n-1}}$，由于 $u_4 \approx 0.00004$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^3} \approx \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}} \approx$$

4. 应用 $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1。$$

**证** $$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!},$$

应用逐项求导，得到

$$\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},$$

以 $x=1$ 代入，即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1。$$

5．求下列函数项级数的和函数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$。

解 (1) 令 $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^{n+1}$，应用逐项求导，得到

$$f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{n-1}=\frac{1}{1+t},$$

于是

$$f'(t)=\ln(1+t)，\quad f(t)=\int_0^t\ln(1+t)dt=(1+t)\ln(1+t)-t，$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^n=(1+\frac{1}{t})\ln(1+t)-1，\quad t\in[-1,1]。$$

以 $t=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2$ 代入，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}=\frac{2(x^2+4)}{(x+2)^2}\ln\frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2}-1,\quad x\in(-\infty,0]。$$

(2) 由级数乘法的 Cauchy 乘积，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x},$$

其中 $x\in(-1,1)$。

6．设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$b>1$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}$ 的和。

解 设 $a_n=c+(n-1)d$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}。$$

首先我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{b}}=\frac{1}{b-1}$。设 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}x^{n-2}$，则

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{b^n}=\frac{x}{b^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{b}}=\frac{x}{b(b-x)},$$

于是 $f(x)=\frac{1}{(b-x)^2}$，所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=f(1)=\frac{1}{(b-1)^2}。$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=\frac{c(b-1)+d}{(b-1)^2}。$$

7．利用幂级数展开，计算$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$。

**解** $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=\int_0^1(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ln x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln xdx=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$，

利用例题 10.4.6 中得到的结果$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，等式两边乘以$\frac{1}{4}$，得到

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$，两式相减，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

于是得到

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=-\frac{\pi^2}{8}。$$

8． (1) 应用$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$，计算π的值，要求精确到$10^{-4}$；

(2) 应用$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$，计算π的值，要求精确到$10^{-4}$。

**解** (1) $\pi=4(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right]$。

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设$u_n=\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)$，由于$u_7\approx 0.000038$，因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字，所以

$$\pi\approx\sum_{n=1}^{7}(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right]\approx 3.1416。$$

(2) $\pi=6\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$。

设$u_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$，由于$\sum_{n=6}^{\infty}u_n<\frac{1}{13}\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\approx 0.0000125$，因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字，所以

$$\pi = 6\arcsin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{6}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}} \approx 3.1416。$$

9．利用幂级数展开，计算$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx$的值，要求精确到$10^{-4}$。

**解** 
$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx = \int_1^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!x^n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_1^3\frac{(-1)^n}{n!x^n}dx$$
$$= 2 - \ln 3 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)。$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设$u_n = \frac{1}{n!(n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$，由于$u_7 < 0.000033$，因此前面$8$项之和的小数部分具有四位有效数字，所以

$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx \approx 2 - \ln 3 + \sum_{n=2}^{7}\frac{(-1)^n}{n!(n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right) \approx$$

# 习　题 10.5　用多项式逼近连续函数

1. 求$f(x)=x^3$的Bernstein多项式$B_n(f,x)$。

**解**　$B_n(f,x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+$
$\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{3k(k-1)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$。

利用等式$\frac{k}{n}C_n^k=\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_{n-1}^{k-1}$，可分别得到

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}C_{n-3}^{k-3}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3\sum_{k=3}^{n}C_{n-3}^{k-3}x^{k-3}(1-x)^{n-k}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3\text{；}$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3k(k-1)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{3(n-1)}{n^2}C_{n-2}^{k-2}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{3(n-1)}{n^2}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}=\frac{3(n-1)}{n^2}x^2\text{；}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{1}{n^2}x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=\frac{1}{n^2}x\text{。}$$

所以

$$B_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3+\frac{3(n-1)}{n^2}x^2+\frac{1}{n^2}x\text{。}$$

2. 设$f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0, 1]$，求它的四次 Bernstein 多项式$B_4(f,x)$。

**解**
$$B_4(f,x)=\sum_{k=1}^{4}\sqrt{\frac{k}{4}}C_4^k x^k(1-x)^{4-k}$$
$$=2x(1-x)^3+3\sqrt{2}x^2(1-x)^2+2\sqrt{3}x^3(1-x)+x^4$$
$$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-1)x^4+2(3+\sqrt{3}-3\sqrt{2})x^3+3(\sqrt{2}-2)x^2+2x\text{。}$$

3. 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，证明：对任意给定的$\varepsilon>0$,，存在有理系数多项式$P(x)$，使得

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon\text{。}$$

对一切$x\in[a, b]$成立。

**证**　由定理 10.5.1，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在多项式$Q(x)$，使得对一切$x\in[a,b]$ 成立

$$|Q(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

设$Q(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k x^k$，其中$b_k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$是实数，由于有理数集合在

实数集中是稠密的，可以取有理数 $a_k\ (k=0,1,2,\cdots,n)$ 分别与 $b_k\ (k=0,1,2,\cdots,n)$ 充分接近，令 $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$，使得对一切 $x\in[a,b]$ 成立

$$|P(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

于是

$$|P(x)-f(x)|\le|P(x)-Q(x)|+|Q(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,\,b]$ 上连续，且对任一多项式 $g(x)$ 成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0。$$

证明在 $[a,\,b]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$。

**证** 由定理 10.5.1，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得对一切 $x\in[a,b]$ 成立

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

由于

$$\int_a^b[f(x)-P(x)]^2dx=\int_a^b[f^2(x)-2f(x)P(x)+P^2(x)]dx=\int_a^b[f^2(x)+P^2(x)]dx，$$

所以

$$\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b[f^2(x)+P^2(x)]dx=\int_a^b[f(x)-P(x)]^2dx<(b-a)\varepsilon^2。$$

由 $\varepsilon$ 的任意性，得到

$$\int_a^b f^2(x)dx=0，$$

再由 $f(x)$ 的连续性，得到

$$f(x)\equiv 0。$$

5. 设 $P_0(x)=0$，$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{x^2-P_n^2(x)}{2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，证明：$\{P_n(x)\}$ 在[-1,1]上一致收敛于 $|x|$。

**证** 首先有 $0\le P_0(x)\le|x|$。设 $0\le P_k(x)\le|x|$，由于函数 $h(t)=t+\frac{x^2-t^2}{2}$ 在

$t \in [0,1]$是单调增加的，所以有

$$0 \le P_{k+1}(x) = P_k(x) + \frac{x^2 - P_k^2(x)}{2} \le |x|,$$

由数学归纳法得到对一切自然数$n$成立

$$0 \le P_n(x) \le |x|。$$

于是由$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$，又得到$P_{n+1}(x) \ge P_n(x)$，所以函数序列$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$，对等式$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$两边求极限，得到$P(x) = P(x) + \dfrac{x^2 - P^2(x)}{2}$，于是解得$P(x) = |x|$，并由 Dini 定理可知$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上是一致收敛于$|x|$的。

# 第十一章　Euclid 空间上的极限和连续

## 习题 11.1　Euclid 空间上的基本定理

1.　证明定理 11.1.1：距离满足正定性、对称性和三角不等式。

**证**　(a) 显然有 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geq 0$，而且

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0 \Leftrightarrow x_i=y_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}。$$

(b) 由距离定义直接可得

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|。$$

(c) 由于

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-tb_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}-2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\geq 0，$$

所以关于上述两次三项式的判别式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}\leq 0，$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}。$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}\right)^2，$$

即

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}。$$

令 $a_i=x_i-y_i, b_i=y_i-z_i$，则有

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2}} = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|。$$

2. 证明：若$\mathbf{R}^n$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛，则其极限是唯一的。

**证** 假设$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$都是点列$\{\mathbf{x}_k\}$的极限，则$\forall \varepsilon > 0$，

$$\exists N_1, \forall k > N_1 : |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| < \varepsilon，$$

$$\exists N_2, \forall k > N_2 : |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}| < \varepsilon。$$

于是当$k > \max\{N_1, N_2\}$时，成立

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}| < 2\varepsilon，$$

由于$\varepsilon$是任意正数，所以$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，即极限是唯一的。

3. 设$\mathbf{R}^n$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$和$\{\boldsymbol{y}_k\}$收敛，证明：对于任何实数$\alpha, \beta$，成立等式

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_k + \beta\boldsymbol{y}_k) = \alpha \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k + \beta \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k。$$

**证** 设$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}$，则$\forall \varepsilon > 0$，

$$\exists N_1, \forall k > N_1 : |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| < \varepsilon，$$

$$\exists N_2, \forall k > N_2 : |\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}| < \varepsilon，$$

于是当$k > \max\{N_1, N_2\}$时，成立

$$|(\alpha\boldsymbol{x}_k + \beta\boldsymbol{y}_k) - (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})| \le |\alpha|\,|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| + |\beta|\,|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon，$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_k + \beta\boldsymbol{y}_k) = \alpha \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k + \beta \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k。$$

4. 求下列$\mathbf{R}^2$中子集的内部、边界与闭包：

（1）$\mathbf{S} = \{(x,y) \mid x > 0, y \ne 0\}$；

（2）$\mathbf{S} = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$；

（3）$\mathbf{S} = \left\{(x,y) \mid 0 < x \le 1,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\}$。

**解** (1) $\mathbf{S}^\circ = \{(x,y) \mid x > 0, y \ne 0\}$；$\partial\mathbf{S} = \{(x,y) \mid x = 0 \text{或} x > 0, y = 0\}$;

$\overline{\mathbf{S}} = \{(x,y) \mid x \ge 0\}$。

(2) $\mathbf{S}^\circ = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$; $\partial\mathbf{S} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 0 \text{或} x^2 + y^2 = 1\}$;

$\overline{\mathbf{S}} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$。

(3) $\mathbf{S}^\circ = \varnothing$; $\partial\mathbf{S} = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 < x \le 1, y = \sin\frac{1}{x} \text{或} x = 0, -1 \le y \le 1\right\}$;

$\overline{\mathbf{S}} = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 < x \le 1, y = \sin\frac{1}{x} \text{或} x = 0, -1 \le y \le 1\right\}$。

5. 求下列点集的全部聚点：

（1）$\mathbf{S}=\left\{(-1)^k\frac{k}{k+1}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$；

（2）$\mathbf{S}=\left\{\left(\cos\frac{2k\pi}{5},\sin\frac{2k\pi}{5}\right)\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$；

（3）$\mathbf{S}=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)(y^2-x^2+1)\le 0\}$。

**解** (1) $\mathbf{S}'=\{\pm 1\}$。

(2) $\mathbf{S}'=\varnothing$。

(3) $\mathbf{S}'=\{(x,y)\mid y^2-x^2+1\le 0\}$。

6. 证明定理 11.1.3：$\boldsymbol{x}$是点集$\mathbf{S}$（$\subset\mathbf{R}^n$）的聚点的充分必要条件是：存在$\mathbf{S}$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足$\boldsymbol{x}_k\ne\boldsymbol{x}$（$k=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$ 。

**证** 必要性：假设$\boldsymbol{x}$是点集$\mathbf{S}$的聚点，对于$\delta=\frac{1}{k}$， 在$\boldsymbol{x}$的$\delta=\frac{1}{k}$邻域中任取一点$\boldsymbol{x}_k\ne\boldsymbol{x}$，则有$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$ 。

充分性：用反证法。假设$\boldsymbol{x}$不是点集$\mathbf{S}$的聚点，则在$\boldsymbol{x}$的某邻域$O(\boldsymbol{x},\delta),\delta>0$中，最多只有$\mathbf{S}$的有限个点，所以$\boldsymbol{S}\cap O(\boldsymbol{x},\delta)-\{\boldsymbol{x}\}$为有限集，于是$d=\inf\{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\mid \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S},\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{x}\}>0$，故不存在$\mathbf{S}$中满足$\boldsymbol{x}_k\ne\boldsymbol{x}$的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$以$\boldsymbol{x}$为极限，产生矛盾。

7. 设 $\mathbf{U}$ 是$\mathbf{R}^2$上的开集，是否 $\mathbf{U}$ 的每个点都是它的聚点。对于$\mathbf{R}^2$中的闭集又如何呢？

**解** 开集 $\mathbf{U}$ 中的每个点 $\boldsymbol{x}$ 一定是它的内点，所以 $\boldsymbol{x}$ 的任意邻域都有 $\mathbf{U}$ 中的无限个点，所以 $\boldsymbol{x}$ 一定是 $\mathbf{U}$ 的聚点。

由于 $\mathbf{S}=\{(0,0)\}$是$\mathbf{R}^2$上的闭集，而 S 只有一个点，所以无聚点，即闭集中的点不一定是它的聚点。

8. 证明$\mathbf{S}\subset\mathbf{R}^n$的所有内点组成的点集$\mathbf{S}^\circ$必是开集。

**证** 假设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{S}^\circ$，则$\exists\delta>0$， $O(\boldsymbol{x},\delta)\subset\boldsymbol{S}$ 。而$\forall\boldsymbol{y}\in O(\boldsymbol{x},\delta)$，由于$O(\boldsymbol{y},\delta-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)\subset O(\boldsymbol{x},\delta)$，所以$\boldsymbol{y}$也是 S 的内点，从而$O(\boldsymbol{x},\delta)\subset\boldsymbol{S}^\circ$，于是$\mathbf{S}^\circ$必是开集。

9. 证明$\mathbf{S}\subset\mathbf{R}^n$的闭包$\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{S}\cup\mathbf{S}'$必是闭集。

**证** 假设$\boldsymbol{x}\in\overline{\mathbf{S}}^c$，则$\boldsymbol{x}\notin\mathbf{S}$，且 $\boldsymbol{x}$ 不是 S 的聚点，于是在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域$O(\boldsymbol{x},\delta)$中至多只有 $\boldsymbol{S}$ 的有限项，故存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域$O(\boldsymbol{x},\delta_1)$不含 $\boldsymbol{S}$ 的点，即

$O(\boldsymbol{x},\delta_1)\subset\bar{\mathbf{S}}^c$，从而$\bar{\mathbf{S}}^c$为开集，所以$\bar{\mathbf{S}}$必是闭集。

10. 设$\mathbf{E},\mathbf{F}\subset\mathbf{R}^n$。若$\mathbf{E}$为开集，$\mathbf{F}$为闭集，证明：$\mathbf{E}\setminus\mathbf{F}$为开集，$\mathbf{F}\setminus\mathbf{E}$为闭集。

**证** 由于$\mathbf{F}$为闭集，所以$\mathbf{F}^c$为开集，而$\mathbf{E}\setminus\mathbf{F}=\mathbf{E}\cap\mathbf{F}^c$，也是开集。由于$\mathbf{E}$为开集，所以$\mathbf{E}^c$为闭集，从而$\mathbf{F}\setminus\mathbf{E}=\mathbf{F}\cap\mathbf{E}^c$也是闭集。

11. 证明 **Cantor** 闭区域套定理。

**证** 假设$\{S_k\}$是非空闭集序列，满足

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_k\supset S_{k+1}\supset\cdots,$$

以及$\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}S_k=0$。任取$\boldsymbol{x}_k\in S_k$，则当$m,n>k$时，$\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_n\in S_k$，从而成立$|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n|\le\operatorname{diam}S_k$，于是$\{\boldsymbol{x}_k\}$是基本序列，从而收敛，设其极限为$\boldsymbol{x}$。对于任意$k$，当$m\ge k$时，$\boldsymbol{x}_m\in S_k$，所以$\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限$\boldsymbol{x}\in\bar{S}_k=S_k$，于是$\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$，所以$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$非空。

再证唯一性。假设$\boldsymbol{y}\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$，则$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\le\operatorname{diam}S_k\to0$（$k\to\infty$），所以$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$。

12. 举例说明：满足$\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|=0$的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$不一定收敛。

**解** $\boldsymbol{x}_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{i}\in\mathbf{R}$，则$\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k+1}=0$，而 $|\boldsymbol{x}_k|=\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{i}\to+\infty$，所以$\{\boldsymbol{x}_k\}$不收敛。

13. 设$\mathbf{E},\mathbf{F}\subset\mathbf{R}^n$为紧集，证明$\mathbf{E}\cap\mathbf{F}$和$\mathbf{E}\cup\mathbf{F}$为紧集。

**证** 因为$\mathbf{E},\mathbf{F}\subset\mathbf{R}^n$为紧集，所以$\mathbf{E},\mathbf{F}$为有界闭集，于是可知$\mathbf{E}\cap\mathbf{F}$和$\mathbf{E}\cup\mathbf{F}$也都是有界闭集，即紧集。

14. 用定义证明点集 $\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\ \middle|\ k=1,2,\cdots\right\}$是$\mathbf{R}$中的紧集。

证 假定$\{U_\alpha\}$为点集 $\boldsymbol{S}=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\ \middle|\ k=1,2,\cdots\right\}$的任一开覆盖。设$0\in U_{\alpha_0}$，则$\exists\delta>0:O(0,\delta)\subset U_{\alpha_0}$，于是当$k>\frac{1}{\delta}$时，$\frac{1}{k}\in U_{\alpha_0}$。对于$\left\{\frac{1}{k}\middle|\ k=0,1,\cdots,[\frac{1}{\delta}]\right\}$，存在$\{U_\alpha\}$中$U_{\alpha_k}$，使得$\frac{1}{k}\in U_{\alpha_k}$， $k=0,1,\cdots,[\frac{1}{\delta}]$。于是

$\left\{U_{\alpha_0},U_{\alpha_k}\ \middle|\ k=0,1,\cdots,[\frac{1}{\delta}]\right\}$构成 $\boldsymbol{S}$ 的有限开覆盖，所以 $\boldsymbol{S}$ 为紧集。

15. 应用 Heine-Borel 定理直接证明：$\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集必有聚点。

证 假定 $\boldsymbol{S}$ 为$\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集，则由习题 9，$\bar{S}=S\cup S'$必是闭集。如果 $\boldsymbol{S}$ 无聚点，即$S'=\varnothing$，则 $\boldsymbol{S}$ 为$\bar{S}=S$，即 $\boldsymbol{S}$ 为有界闭集，从而由 Heine-Borel 定理知 $\boldsymbol{S}$ 为$\mathbf{R}^n$ 上的紧集。

$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$，由于 $\boldsymbol{x}$ 不是 $\boldsymbol{S}$ 的聚点，存在$O(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})$只含有 $\boldsymbol{S}$ 中有限个点。显然$\{O(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\}$构成为 $\boldsymbol{S}$ 的一个开覆盖，但由于其中有限个$O(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})$只能包含 $\boldsymbol{S}$ 中有限个点，因而不存在 $\boldsymbol{S}$ 的有限开覆盖，矛盾！所以 $\boldsymbol{S}$ 必有聚点。

# 习题 11.2 多元连续函数

1. 确定下列函数的自然定义域：

(1) $u=\ln(y-x)+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$； (2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$；

(3) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}\quad (R>r)$；

(4) $u=\arcsin\dfrac{z}{x^2+y^2}$。

**解** (1) $D=\{(x,y)\,|\; x^2+y^2<1,\; y>x\}$。

(2) $D=\{(x,y,z)\,|\; x>0, y>0, z>0\}$。

(3) $D=\{(x,y,z)\,|\; r^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2\}$。

(4) $D=\{(x,y,z)\,|\; |z|\le x^2+y^2,\, x^2+y^2\ne 0\}$。

2. 设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\quad (x>0)$，求 $f(x)$。

**解** 因为

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ 。$$

3. 若函数

$$z(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1),$$

且当 $y=4$ 时 $z=x+1$，求 $f(x)$ 和 $z(x,y)$。

**解** 由 $z(x,4)=\sqrt{4}+f(\sqrt{x}-1)=x+1$，可得

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1+1)^2-1,$$

所以

$$f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x,$$

$$z(x,y)=x+\sqrt{y}-1。$$

4. 讨论下列函数当 $(x,y)$ 趋于 $(0,0)$ 时的极限是否存在：

（1） $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ ；　　　　（2） $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ；

（3） $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\\ 0 & \text{其它点};\end{cases}$　　　　（4） $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^8}$。

解（1）由于 $f(x,kx)=\dfrac{x-kx}{x+kx}=\dfrac{1-k}{1+k}$ 依赖于 *k*，所以当 $(x,y)$ 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在。

（2） $f(x,kx)=\dfrac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 依赖于 *k*，所以当 $(x,y)$ 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在。

（3）由于 $f(x,\frac{x^2}{2})=1$，所以当 $(x,y)$ 沿曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 趋于 $(0,0)$ 时，函数极限为 1，而当 $(x,y)$ 沿 $x$ 轴趋于 $(0,0)$ 时，函数极限为 0，所以当 $(x,y)$ 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在。

（4）利用平均值不等式

$$\frac{x^4+y^8}{3}=\frac{\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^4+y^8}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{4}x^8y^8},$$

可得

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3y^3|}{x^4+y^8}\leq\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\frac{|xy|^3}{|xy|^{\frac{8}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}|xy|^{\frac{1}{3}}\to 0,((x,y)\to(0,0)),$$

所以当 $(x,y)$ 趋于 $(0,0)$ 时函数极限存在且为 0。

5. 对多元函数证明极限唯一性，局部有界性，局部保序性和局部夹逼性。

证 （1）假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})$=A， $\lim\limits_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})$=B，则 $\forall\varepsilon>0$，

$$\exists\delta_1>0,\forall\boldsymbol{x}\ (0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1):|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon,$$

$$\exists\delta_2>0,\forall\boldsymbol{x}\ (0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2):|f(\boldsymbol{x})-B|<\varepsilon。$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，成立

$$|A-B|\leq|f(\boldsymbol{x})-A|+|f(\boldsymbol{x})-B|<2\varepsilon,$$

由于 $\varepsilon$ 为任意正数，所以 A=B，即极限唯一。

（2）假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})$=A，则对于 $\varepsilon=1$，

$$\exists\delta>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta):|f(\boldsymbol{x})-A|<1,$$

即

$$|f(\boldsymbol{x})|<|A|+1。$$

所以 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$点的某个去心领域有界。

(3) 设 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$=A> $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x})$=B，则对于 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$，

$$\exists\delta_1>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1):|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon,$$

即

$$f(\boldsymbol{x})>A-\varepsilon=\frac{A+B}{2}。$$

又

$$\exists\delta_2>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2):|g(\boldsymbol{x})-B|<\varepsilon,$$

即

$$g(\boldsymbol{x})<B+\varepsilon=\frac{A+B}{2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，成立局部保序性：

$$g(\boldsymbol{x})<\frac{A+B}{2}<f(\boldsymbol{x})。$$

(4)假定存在 $\rho>0$，使当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\rho$ 时成立

$$g(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x})\le h(\boldsymbol{x}),$$

且 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} h(\boldsymbol{x})$=A。

$\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} h(\boldsymbol{x})$=A，

$$\exists\delta_1>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1):|h(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon,$$

所以

$$h(\boldsymbol{x})<A+\varepsilon。$$

又由 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x})$ =A，

$$\exists\delta_2>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2):|g(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon,$$

所以

$$g(\boldsymbol{x})>A-\varepsilon。$$

取 $\delta=\min\{\rho,\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，成立

$$A-\varepsilon<g(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x})\le h(\boldsymbol{x})<A+\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$=A。

6． 对多元函数证明极限的四则运算法则：假设当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$时函数 $f(\boldsymbol{x})$和 $g(\boldsymbol{x})$的极限存在，则

（1） $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})\pm g(\boldsymbol{x}))=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})\pm\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x})$；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ （$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$）。

证 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=A， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$=B。则对任意 $\varepsilon>0$，

$$\exists\delta_1>0,\forall x\ (0<|x-x_0|<\delta_1):|f(x)-A|<\varepsilon，$$

$$\exists\delta_2>0,\forall x\ (0<|x-x_0|<\delta_2):|g(x)-B|<\varepsilon，$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，成立

$$|(f(x)\pm g(x))-(A\pm B)|\le|f(x)-A|+|g(x)-B|<2\varepsilon，$$

所以（1）成立。

由于 $g(x)$ 在 $x_0$ 有极限，所以 $g(x)$ 在 $x_0$ 局部有界，即存在正数 X 和 $\delta'>0$， $\forall x\ (0<|x-x_0|<\delta'):|g(x)|<X$。取 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，成立

$$|f(x)g(x)-AB|\le|f(x)g(x)-Ag(x)|+|Ag(x)-AB|$$
$$<(X+|A|)\varepsilon，$$

所以（2）成立。

由于 B≠0，$\forall\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{|B|}{2}\right)$，$\exists\delta''>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta'')$：

$$|g(x)|>|B|-\varepsilon\ge\frac{|B|}{2}。$$

取 $\delta=\min\{\delta'',\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，成立

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|\le\left|\frac{B(f(x)-A)-A(g(x)-B)}{Bg(x)}\right|$$
$$<\frac{2(|A|+|B|)}{|B|^2}\varepsilon，$$

所以（3）成立。

7. 求下列各极限：

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$；

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$；（4） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$；

（5） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$；（6） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$；

（7） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$；（8） $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$。

解 （1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1-xy)}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(x^2+y^2)}=1$。

（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0, \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)=1$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=+\infty\text{。}$$

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{1+xy}+1}=\dfrac{1}{2}$。

（4） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)=2$。

（5） $\ln(x^2+e^{y^2})=\ln(1+x^2+e^{y^2}-1)=x^2+y^2+o(y^2)=x^2+y^2+o(x^2+y^2)$，

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}=1\text{。}$$

（6） $|\sin(x^3+y^3)|\le|x^3+y^3|=|x+y||x^2+y^2-xy|\le 2|x+y||x^2+y^2|$，

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0\text{。}$$

（7）因为

$$1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \quad \big((x,y)\to(0,0)\big)\text{，}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}\ge\frac{1}{|xy|}\text{，}\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{|xy|}=+\infty\text{，}$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}=+\infty\text{。}$$

（8） $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left[(x^2e^{-x})e^{-y}\right]+\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left[(y^2e^{-y})e^{-x}\right]=0$。

8． 讨论下列函数在原点的二重极限和二次极限：

（1） $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ ；

（2） $f(x,y)=\dfrac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$ ；

（3） $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$。

解 (1) 由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x+kx^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4(1+kx)^2}{x^4(1+kx)^2+k^2x^4}=\frac{1}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在。

由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\dfrac{0}{y^2}=0,\quad y\neq 0$，可知 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$。同理可知 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$。所以二次极限存在且都等于 0。

（2）由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+x^2)-k^2x^2(1+k^2x^2)}{x^2(1+k^2)}=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在。又

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=-\lim_{y\to 0}(1+y^2)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}(1+x^2)=1。$$

所以二次极限都存在但不相等。

（3）由于$|f(x,y)|\leq|x|+|y|$，所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$。

由于$\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}\quad(y\neq 0)$和$\lim\limits_{y\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}\quad(x\neq 0)$都不存在，所以两个二次极限都不存在。

9．验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}\left(y-\dfrac{1}{2}x^2\right), & x>0\text{ 且 }\dfrac{1}{2}x^2<y\le x^2,\\ \dfrac{1}{x^2}(2x^2-y), & x>0\text{ 且 }x^2<y<2x^2,\\ 0, & \text{其它点}\end{cases}$$

在原点不连续，而在其它点连续。

证 设 $x>0$， $f(x,x^2)=\dfrac{2}{x^2}\left(x^2-\dfrac{1}{2}x^2\right)=1$，所以当点 $(x,y)$ 沿 $y=x^2\ (x>0)$ 趋于原点时函数 $f(x,y)$ 的极限为 1，而当点 $(x,y)$ 沿 $x$ 轴趋于原点时函数 $f(x,y)$ 的极限为 0，所以函数 $f(x,y)$ 在原点不连续。

对于函数 $f(x,y)$ 在其它点的连续性只要考虑函数在下述曲线

$$y=\frac{1}{2}x^2, y=x^2, y=2x^2\quad (x>0)$$

上的情况（因为在除去上述曲线和原点的区域上函数显然连续）。

设 $x_0>0$。在 $(x_0,y_0)=(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2)$ 点，由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y>x^2/2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2(y-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}=0=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y\le x^2/2}} f(x,y)=0=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2)$ 连续。同理可知函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=(x_0,2x_0^2)$ 也连续。

在 $(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$ 点，由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ 2x^2>y>x^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2x^2-y}{x^2}=\frac{2x_0^2-x_0^2}{x_0^2}=1=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2/2<y\le x^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2(y-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}=\frac{2(x_0^2-\frac{1}{2}x_0^2)}{x_0^2}=1=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$ 也连续。

综上所述，函数 $f(x,y)$ 除了在原点不连续，在其它点都连续。

10．讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续范围。

**解** 显然函数 $f(x,y)$ 在区域 $\{(x,y)|\ x^2+y^2\neq 0\}$ 上连续，所以只要考虑函数 $f(x,y)$ 在原点的连续性。由 $|x^2y|\le\frac{1}{2}|x|(x^2+y^2)$，得到

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|x|,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0,$$

即函数在原点也连续。因此函数 $f(x,y)$ 在平面上点点连续。

11．设 $f(t)$ 在区间 $(a,b)$ 上具有连续导数，$\mathbf{D}=(a,b)\times(a,b)$。定义 $\mathbf{D}$ 上的函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ f'(x), & x=y.\end{cases}$$

证明：对于任何 $c\in(a,b)$ 成立

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c)。$$

**证** 由题设，利用 Lagrange 中值定理 $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$，其中 $\xi$ 介于 $x$ 和 $y$ 之间。所以

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,c)\\ x\neq y}}F(x,y)=\lim_{(x,y)\to(c,c)}f'(\xi)=f'(c),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,c)\\ x=y}}F(x,y)=\lim_{x\to c}f'(x)=f'(c),$$

综合上面两式可得

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c)。$$

12．设二元函数 $f(x,y)$ 在开集 $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^2$ 内对于变量 $x$ 是连续的，对于变量 $y$ 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|,$$

其中 $(x,y'),(x,y'')\in\mathbf{D}$，$L$ 为常数（通常称为 Lipschitz 常数）。证明 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 内连续。

**证** 假设 $(x_0,y_0)\in\mathbf{D}$，由于函数对于变量 $x$ 是连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0,\forall x(|x-x_0|<\delta)$，成立

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon。$$

当$|(x,y)-(x_0,y_0)|<\min(\delta,\varepsilon)$时

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)| &\le |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \\ &\le L|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \\ &\le L\varepsilon+\varepsilon\text{，}\end{aligned}$$

所以$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$内连续，证毕。

13．证明：若$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$是$\mathbf{D}$上的连续映射，则映射$\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$与函数$<\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}>$在$\mathbf{D}$上都是连续的。

证 假设$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{D}$，由$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$是连续，$\forall\varepsilon>0$，

$\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta)$，成立$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$，

$\exists\delta_1>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1)$，成立$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$，

于是

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))|$$

$$\le|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|\le 2\varepsilon\text{，}$$

所以映射$\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{x}_0$连续。又

$$|<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})>-<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)>|$$

$$=|<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})>+<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)>|$$

$$\le|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|\varepsilon+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|\varepsilon\text{，}$$

由于$\boldsymbol{g}$连续，所以$\boldsymbol{g}$的每个分量都连续，从而都局部有界，于是$\boldsymbol{g}$也局部有界。根据上式，$<\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}>$在$\boldsymbol{x}_0$连续，证毕。

14．证明复合映射的连续性定理（定理 11.2.3）。

证 假设$\boldsymbol{g}$在$D$上连续，$\boldsymbol{f}$在$\Omega$上连续，并且$\boldsymbol{x}_0\in D,\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\in\Omega$。由$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{u}_0$上连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall\boldsymbol{u}(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|<\eta)$成立

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon。$$

对于上述$\eta>0$，由 $g$ 在 $x_0$ 连续知 $\exists\delta>0, \forall x(|x-x_0|<\delta)$ 成立

$$|g(x)-g(x_0)|<\eta。$$

于是，当$|x-x_0|<\delta$时，

$$|f\circ g(x)-f\circ g(x_0)|=|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon，$$

所以复合函数 $f\circ g$ 在 $x_0$ 连续。

# 习　题　11.3　连续函数的性质

1．　设$\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}:\mathbf{D}\to\mathbf{R}^m$为连续映射。如果$\mathbf{D}$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，且$\boldsymbol{a}\in\mathbf{D}$，证明

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})。$$

**证**　由$\mathbf{f}$在$\boldsymbol{a}$连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta)$，成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon。$$

又由于$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，对于上述$\delta>0$，存在$K$，当$k>K$时成立

$$|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}|<\delta，$$

于是当$k>K$时成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon。$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})。$$

2．　设$f$是$\mathbf{R}^n$上的连续函数，$c$为实数。设

$$\boldsymbol{A}_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}，\quad \mathbf{B}_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leq c\}。$$

证明$\boldsymbol{A}_c$为$\mathbf{R}^n$上的开集，$\boldsymbol{B}_c$为$\mathbf{R}^n$上的闭集。

**证**　对于任意$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{A}_c$，由于$f$在$\boldsymbol{x}_0$连续，取$\varepsilon=c-f(\boldsymbol{x}_0)>0$，则$\exists\delta>0$，$\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta)$，成立

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon=c-f(\boldsymbol{x}_0)，$$

即有$f(\boldsymbol{x})<c$，所以$\boldsymbol{x}\in\mathbf{A}_c$。这说明$\boldsymbol{A}_c$为$\mathbf{R}^n$上的开集。

由$f$在$\mathbf{R}^n$上连续可知$-f$也在$\mathbf{R}^n$上连续，于是

$$(\mathbf{B}_c)^c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid -f(\boldsymbol{x})<-c\}$$

为$\mathbf{R}^n$上的开集，所以$\boldsymbol{B}_c$为$\mathbf{R}^n$上的闭集。

3．　设二元函数

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy}，\quad (x,y)\in\mathbf{D}=[0,1)\times[0,1)，$$

证明：$f$在$\mathbf{D}$上连续，但不一致连续。

**证**　由于$f$在$\mathbf{D}$上是初等函数，所以连续。但因为当$n\to+\infty$时，

$$\left|(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n})-(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})\right|\to 0，$$

而

$$f(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n})-f(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})$$

$$=\frac{4n^2}{4n-1}-\frac{n^2}{2n-1}=\frac{(4n-3)n^2}{(4n-1)(2n-1)}\to+\infty,$$

所以 $f$ 在 $\mathbf{D}$ 上不一致连续。

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集，定义 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f$ 为

$$f(\boldsymbol{x})=\inf\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\,|\,\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{A}\}。$$

它称为 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{A}$ 的距离。证明：

(1) 当且仅当 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}$ 时，$f(\boldsymbol{x})=0$；

(2) 对于任意 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in\mathbf{R}^n$，不等式

$$\left|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')\right|\leq|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|$$

成立，从而 $f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续；

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 是紧集，则对于任意 $c>0$，点集 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,f(\boldsymbol{x})\leq c\}$ 是紧集。

**证** （1）假定 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}$，则存在 $\boldsymbol{A}$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}|=0$，所以 $f(\boldsymbol{x})=0$。反之，由 $f(\boldsymbol{x})=0$ 可知存在 $\boldsymbol{A}$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}|=0$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$，所以 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}$。

（2）不妨假设 $f(\boldsymbol{x}')\geq f(\boldsymbol{x}'')$。首先对于任意的 $k$，存在 $\mathbf{x}_k\in\mathbf{A}$，满足

$$f(\boldsymbol{x}'')>|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}_k|-\frac{1}{k},$$

再利用

$$f(\boldsymbol{x}')\leq|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_k|,$$

两式相减，得到

$$0<f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')<|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_k|-(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}_k|-\frac{1}{k})\leq|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|+\frac{1}{k},$$

令 $k\to\infty$，即得到

$$\left|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')\right|\leq|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|。$$

由上式即可知 $f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续。

（3）由（2）知 $f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，再由习题 2 知点集 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,f(\boldsymbol{x})\leq c\}$ 是闭集。由于 $\boldsymbol{A}$ 是紧集，所以 $\boldsymbol{A}$ 有界，即 $\exists M,\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$，成立 $|\boldsymbol{x}|\leq M$。$\forall\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}$，取 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$，使得

$$f(\boldsymbol{y})>|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|-1。$$

于是

$$|\boldsymbol{y}|\leq|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{x}|<f(\boldsymbol{y})+1+M\leq c+1+M,$$

即 $\boldsymbol{B}$ 也有界。所以 $\boldsymbol{B}$ 为有界闭集，也就是紧集。

5. 设二元函数 $f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。证明：

（1）若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，则 $f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值必定存在；

（2）若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，则 $f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值与最小值至少存在一个。

证 （1）任取一点 $(x_0,y_0)$，由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$，可知存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$，成立 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$。$f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$ 上必定取到最小值，且此最小值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值。

（2）如果 $f(x,y)\equiv 0$，则命题显然成立。不然的话，任取 $(x_0,y_0)$，使得函数值在此点非零。

若 $f(x_0,y_0)>0$，由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，可知存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$，成立 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$ 上必定取到最大值，且此最大值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值。

若 $f(x_0,y_0)<0$，由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，可知存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$，成立 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$ 上必定取到最小值，且此最小值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值。

6．设 $f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，满足

(1) 当 $\boldsymbol{x}\ne 0$ 时成立 $f(\boldsymbol{x})>0$；

(2) 对于任意 $\boldsymbol{x}$ 与 $c>0$，成立 $f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})$。

证明：存在 $a>0, b>0$，使得

$$a|\boldsymbol{x}|\le f(\boldsymbol{x})\le b|\boldsymbol{x}|。$$

证 单位球面是 $\mathbf{R}^n$ 上的紧集，设 $f$ 在单位球面上的最小值和最大值分别为 $a$ 和 $b$，则有

$$0<a\le f(\boldsymbol{x})\le b<+\infty，\quad \forall|\boldsymbol{x}|=1。$$

于是 $\forall \boldsymbol{x}\ne\mathbf{0}$，由于 $\left|\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right|=1$，所以

$$f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|\,f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)\le b|\boldsymbol{x}|,$$

同理 $f(\boldsymbol{x})\ge a|\boldsymbol{x}|$。由于当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时不等式显然成立，所以 $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，成立

$$a|\boldsymbol{x}|\le f(\boldsymbol{x})\le b|\boldsymbol{x}|。$$

7．设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射。证明对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意子集 $\boldsymbol{A}$，成立

$$\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{A}})\subset\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}。$$

举例说明 $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 能够是 $\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$ 的真子集。

证 $\forall \boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}$，存在 $\boldsymbol{A}$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$，由于映射 $\boldsymbol{f}$ 在 $x$ 连续，

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})，$$

所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$，即 $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{A}})\subset\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$。

取 n=2， $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。令 $\boldsymbol{A}=\mathbf{R}^2$，则 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$，但

$$\mathbf{f}(\bar{\boldsymbol{A}})=\{x \mid x>0\}，\ \overline{\mathbf{f}(\boldsymbol{A})}=\{x \mid x \geq 0\}，$$

$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{A}})$ 是 $\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$ 的真子集。

8．设 $f$ 是有界开区域 $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$ 上的一致连续函数。证明：

（1）可以将 $f$ 连续延拓到 $\mathbf{D}$ 的边界上，即存在定义在 $\bar{\mathbf{D}}$ 上的连续函数 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}\big|_{\mathbf{D}}=f$；

（2） $f$ 在 $\mathbf{D}$ 上有界。

**证** （1）由于 $f$ 在 $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$ 上的一致连续， $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$， $\forall \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \mathbf{D}$ $(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta)$：

$$|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon。$$

设 $\varsigma \in \partial D$，任取点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ （$\boldsymbol{x}_n \in \mathbf{D}$， $\boldsymbol{x}_n \to \varsigma$)，由于 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 为 Cauchy 点列，对于上述 $\delta>0$， $\exists K$，当 $m,n>K$ 时，成立 $|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n|<\delta$，于是

$$|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_n)|<\varepsilon，$$

所以 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 是基本数列，故一定收敛。记该极限为 $g(\varsigma)$。

在 $|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_n)|<\varepsilon$ 中令 $m \to \infty$，得到

$$|f(\boldsymbol{x}_n)-g(\varsigma)| \leq \varepsilon。$$

对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{D}, |\boldsymbol{x}-\zeta|<\delta/2$，存在点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 中某项 $\boldsymbol{x}_k$，满足

$$|\boldsymbol{x}_k-\zeta|<\delta/2,\ |f(\boldsymbol{x}_k)-g(\zeta)| \leq \varepsilon。$$

于是

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k| \leq |\boldsymbol{x}-\zeta|+|\boldsymbol{x}_k-\zeta|<\delta，$$

$$|f(\boldsymbol{x})-g(\zeta)| \leq |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_k)|+|f(\boldsymbol{x}_k)-g(\zeta)|<2\varepsilon，$$

所以

$$\lim_{\substack{x \to \zeta \\ x \in D}} f(\boldsymbol{x})=g(\zeta)，$$

由此可知 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 的极限 $g(\zeta)$ 只与 $\varsigma \in \partial \mathbf{D}$ 有关，而与点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的选取无

关。令

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in \mathbf{D}, \\ g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in \partial\mathbf{D}。\end{cases}$$

显然，$\tilde{f}$ 在 $\mathbf{D}$ 上连续。现只要证明 $\tilde{f}$ 在 $\partial\mathbf{D}$ 上连续。设 $\varsigma\in\partial\mathbf{D}$，由

$$\lim_{\substack{x\to\zeta \\ x\in D}} f(\boldsymbol{x})=g(\varsigma)=\tilde{f}(\varsigma)，$$

可知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$， $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{D}\ (|\boldsymbol{x}-\varsigma|<\delta)$ ：

$$|f(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\varsigma)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

对于 $\forall\varsigma'\in\partial\mathbf{D}\ (|\varsigma'-\varsigma|<\delta)$，在上式中令 $\boldsymbol{x}\to\varsigma'$，由

$$\lim_{\substack{x\to\zeta' \\ x\in D}} f(\boldsymbol{x})=\tilde{f}(\varsigma')，$$

可知

$$\left|\tilde{f}(\varsigma')-\tilde{f}(\varsigma)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon，$$

于是得到

$$\lim_{\substack{x\to\zeta \\ x\in \overline{D}}} \tilde{f}(\boldsymbol{x})=\tilde{f}(\varsigma)，$$

这就证明了 $\tilde{f}$ 在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上连续。换言之，$\tilde{f}$ 是定义在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上的连续函数，满足 $\tilde{f}\big|_{\mathbf{D}}=f$。

（2）由于 $\overline{D}$ 为有界闭集，即紧集，$\tilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 连续保证了 $\tilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 有界，从而 $f$ 在 $\mathbf{D}$ 上有界。

# 第十二章　多元函数的微分学

## 习 题　12.1　偏导数与全微分

1．　求下列函数的偏导数：

（1）　$z = x^5 - 6x^4y^2 + y^6$ ；　　（2）　$z = x^2\ln(x^2 + y^2)$ ；

（3）　$z = xy + \dfrac{x}{y}$ ；　　（4）　$z = \sin(xy) + \cos^2(xy)$ ；

（5）　$z = \mathrm{e}^x(\cos y + x\sin y)$ ；　　（6）　$z = \tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ ；

（7）　$z = \sin\dfrac{x}{y}\cdot\cos\dfrac{y}{x}$ ；　　（8）　$z = (1 + xy)^y$ ；

（9）　$z = \ln(x + \ln y)$ ；　　（10）　$z = \arctan\dfrac{x + y}{1 - xy}$ ；

（11）　$u = \mathrm{e}^{x(x^2 + y^2 + z^2)}$ ；　　（12）　$u = x^{\frac{y}{z}}$；

（13）　$u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ；　　（14）　$u = x^{y^z}$ ；

（15）　$u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ ，　$a_i$ 为常数；　（16）　$u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$，　$a_{ij} = a_{ji}$ 为常数。

**解**（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 24x^3y^2$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y^5 - 12x^4y$。

(2)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^3}{x^2 + y^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^2y}{x^2 + y^2}$。

(3)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2}$。

(4)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y[\cos(xy) - \sin(2xy)]$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x[\cos(xy) - \sin(2xy)]$。

(5)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + x\sin y + \sin y)$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^x(x\cos y - \sin y)$。

(6)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y}\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2}\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$。

(7)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$。

(8) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$。

(9) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$。

(10) 注意 $z=\arctan x+\arctan y$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$。

(11) $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)\ e^{x(x^2+y^2+z^2)}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy\ e^{x(x^2+y^2+z^2)}$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=2xz\ e^{x(x^2+y^2+z^2)}$。

(12) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\ln x}{z}x^{\frac{y}{z}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y\ln x}{z^2}x^{\frac{y}{z}}$。

(13) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$。

(14) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$，$\frac{\partial u}{\partial z}=y^z x^{y^z}\ln x\ln y$。

(15) $\frac{\partial u}{\partial x_i}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,n$。

(16) $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j,\quad i=1,2,\cdots,n$，$\frac{\partial u}{\partial y_j}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,\quad j=1,2,\cdots,n$。

2. 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x(3,4)$ 及 $f_y(3,4)$。

解　因为 $f_x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},f_y=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，所以

$$f_x(3,4)=\frac{2}{5}，\quad f_y(3,4)=\frac{1}{5}。$$

3. 设 $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$，验证 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

证　由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$，所以

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0。$$

4. 曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线与$x$轴的正向所夹的角度是多少？

解 以$x$为参数，曲线在点$(2,4,5)$处的切向量为$\left.(\frac{dx}{dx},\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx})\right|_{x=2}=(1,0,1)$，设它与$x$轴的正向所夹的角度为$\theta$，则

$$\cos\theta=\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}\cdot(1,0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}，$$

所以$\theta=\frac{\pi}{4}$。

5. 求下列函数在指定点的全微分：

（1） $f(x,y)=3x^2y-xy^2$，在点$(1,2)$；

（2） $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$，在点$(2,4)$；

（3） $f(x,y)=\frac{\sin x}{y^2}$，在点$(0,1)$和$\left(\frac{\pi}{4},2\right)$。

解 (1) 因为$df(x,y)=(6xy-y^2)dx+(3x^2-2xy)dy$，所以

$$df(1,2)=8dx-dy。$$

(2) 因为$df(x,y)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dx+\frac{2y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dy$，所以

$$df(2,4)=\frac{4}{21}dx+\frac{8}{21}dy。$$

(3) 因为$df(x,y)=\frac{\cos x}{y^2}dx-\frac{2\sin x}{y^3}dy$，所以

$$df(0,1)=dx,\quad df(\frac{\pi}{4},2)=\frac{\sqrt{2}}{8}dx-\frac{\sqrt{2}}{8}dy。$$

6. 求下列函数的全微分：

（1） $z=y^x$； （2） $z=xy\mathrm{e}^{xy}$；

（3） $z=\frac{x+y}{x-y}$； （4） $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

（5） $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$； （6） $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$。

解 (1) $dz=y^x\ln y dx+xy^{x-1}dy$ 。

(2) $dz=e^{xy}(1+xy)(ydx+xdy)$ 。

(3) $dz=-\frac{2y}{(x-y)^2}dx+\frac{2x}{(x-y)^2}dy$ 。

(4) $dz=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$ 。

(5) $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 。

(6) $du=\frac{2(xdx+ydy+zdz)}{x^2+y^2+z^2}$。

7. 求函数 $z=x\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。

解 由于 $\boldsymbol{v}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}=\frac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=(v_1,v_2)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{2y},\frac{\partial z}{\partial y}=2x\mathrm{e}^{2y},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial z}{\partial x}v_1+\frac{\partial z}{\partial y}v_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

8. 设 $z=x^2-xy+y^2$，求它在点 $(1,1)$ 处的沿方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数，并指出：

（1）沿哪个方向的方向导数最大？

（2）沿哪个方向的方向导数最小？

（3）沿哪个方向的方向导数为零？

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha=(2x-y)\cos\alpha+(2y-x)\sin\alpha,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}\Big|_{(1,1)}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin\alpha=2\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha),$$

(1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，沿 $\mathrm{v}=(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4})$，方向导数最大。

(2) 当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时，沿 $\mathrm{v}=(\cos\frac{5\pi}{4},\sin\frac{5\pi}{4})$，方向导数最小。

(3) 当 $\alpha=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 时，沿 $\mathrm{v}=(\cos\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{4})$ 或 $\mathrm{v}=(\cos\frac{7\pi}{4},\sin\frac{7\pi}{4})$，方向导数为零。

9． 如果可微函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2)$ 方向的方向导数为 2，从点 $(1,2)$ 到点 $(1,1)$ 方向的方向导数为-2。求

（1）这个函数在点 $(1,2)$ 处的梯度；

（2）点 $(1,2)$ 处的从点 $(1,2)$ 到点 $(4,6)$ 方向的方向导数。

**解** $\boldsymbol{v}_1=(2,2)-(1,2)=(1,0)$，$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}_1}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 0=\frac{\partial z}{\partial x}=2$。

$\boldsymbol{v}_2=(1,1)-(1,2)=(0,-1)$，$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}_2}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(-1)=-\frac{\partial z}{\partial y}=-2$。

所以在 $(1,2)$ 处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=2。$$

(1) $\operatorname{grad} f(1,2)=(2,2)$。

(2) 因为 $(4,6)-(1,2)=(3,4)$，$\boldsymbol{v}=\frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{(3,4)}{5}$，所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}\right|_{(1,2)}=2\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{4}{5}=\frac{14}{5}。$$

10. 求下列函数的梯度：

（1） $z=x^2+y^2\sin(xy)$； （2） $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$；

（3） $u=x^2+2y^2+3z^2+3xy+4yz+6x-2y-5z$，在点 $(1,1,1)$。

**解** (1) $\operatorname{grad} z=(2x+y^3\cos(xy),\,2y\sin(xy)+xy^2\cos(xy))$ 。

(2) $\operatorname{grad} z=(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2})$。

(3) $\operatorname{grad} u=(2x+3y+6,4y+3x+4z-2,6z+4y-5)$， $\operatorname{grad} u(1,1,1)=(11,9,5)$。

11. 对于函数 $f(x,y)=xy$，在第 I 象限（包括边界）的每一点，指出函数值增加最快的方向。

**解**　在 $(x,y)\neq(0,0)$ 点，函数值增长最快的方向为 $\operatorname{grad} f=(y,x)$；

在 $(0,0)$ 点，由于梯度为零向量，不能直接从梯度得出函数值增长最快的方向。设沿方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 自变量的改变量为

$$\Delta x=t\cos\alpha,\ \Delta y=t\sin\alpha\text{，}$$

则函数值的改变量为

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\Delta y=t^2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}t^2\sin 2\alpha\text{，}$$

由此可知当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}$ 时函数值增长最快，即函数值增长最快的方向为 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$。

12．　验证函数

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$$

在原点 $(0,0)$ 连续且可偏导，但除方向 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $-\boldsymbol{e}_i$（$i=1,2$）外，在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

**解**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt[3]{xy}=0=f(0,0)\text{，}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\cdot 0}-0}{\Delta x}=0\text{，}\quad f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot\Delta y}-0}{\Delta y}=0\text{，}$$

所以函数在原点 $(0,0)$ 连续且可偏导。取方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt[3]{t\cos\alpha\cdot t\sin\alpha}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt[3]{\sin 2\alpha}}{\sqrt[3]{2t}}\text{，}$$

当 $\sin 2\alpha=0$，即 $\alpha=\dfrac{k\pi}{2}$ 时，极限存在且为零；当 $\sin 2\alpha\neq 0$，即 $\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}$ 时，极限不存在。所以除方向 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $-\boldsymbol{e}_i$（$i=1,2$）外，在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

13.　验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点$(0,0)$连续且可偏导，但它在该点不可微。

解　由于

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)),$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)。$$

由定义，

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0}} - 0}{\Delta x} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{0\cdot \Delta y}{\sqrt{0+\Delta y^2}} - 0}{\Delta y} = 0。$$

所以函数在原点$(0,0)$连续且可偏导。但

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]$$

$$= f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \ne o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

所以函数在$(0,0)$不可微。

14.　验证函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

的偏导函数$f_x(x,y), f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

解　由定义，

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x^2+0^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

当$(x,y)\ne(0,0)$时，

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \ne 0。$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x=y}} f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x^2}\right),$$

极限不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续。同理 $f_y(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 也不连续。但由于

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$$

$$=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

所以函数在 $(0,0)$ 可微。

15. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点 $(0,0)$ 处沿各个方向的方向导数都存在，但它在该点不连续，因而不可微。

解　函数沿方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha\cdot t^3}{(\cos^2\alpha+\sin^4\alpha\cdot t^2)t^2}=0,\quad \forall\alpha,$$

所以函数在原点 $(0,0)$ 处沿各个方向的方向导数都存在。但当 $(x,y)$ 沿曲线 $x=ky^2$ 趋于 $(0,0)$ 时，极限

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=ky^2}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2ky^4}{k^2y^4+y^4}=\frac{2k}{k^2+1}$$

与 $k$ 有关，所以函数在原点不连续，因而不可微。

16．计算下列函数的高阶导数：

（1）$z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（2）$z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（3）$z=x\mathrm{e}^{xy}$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

（4） $u=\ln(ax+by+cz)$，求$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4},\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$ ；

（5） $z=(x-a)^p(y-b)^q$，求$\dfrac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\partial y^q}$ ；

（6） $u=xyz\,\mathrm{e}^{x+y+z}$，求$\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$。

解 (1) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}\text{，}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\text{，}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\text{，}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\text{。}$$

(2) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(1-y)\sin(x+y)+x\cos(x+y)\text{，}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(1+x)\cos(x+y)-y\sin(x+y)$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2-y)\cos(x+y)-x\sin(x+y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1-y)\cos(x+y)-(1+x)\sin(x+y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-y\cos(x+y)-(x+2)\sin(x+y)\text{。}$$

(3) 由

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\mathrm{e}^{xy}\text{，}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3\mathrm{e}^{xy}\text{，}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2x+x^2y)e^{xy}$$

得到

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=(2+4xy+x^2y^2)e^{xy}\text{，}\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=(3x^2+x^3y)e^{xy}\text{。}$$

(4) 经计算，可依次得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{ax+by+cz}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=\frac{a}{ax+by+cz}，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{a}{(ax+by+cz)^2}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=-\frac{a^2}{(ax+by+cz)^2}，$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{2a^2}{(ax+by+cz)^3}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=\frac{2a^3}{(ax+by+cz)^3}，$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\frac{3\cdot 2a^3}{(ax+by+cz)^4}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=-\frac{6a^4}{(ax+by+cz)^4}，$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=\frac{2a^2}{(ax+by+cz)^3}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y}=\frac{2a^2b}{(ax+by+cz)^3}，$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}=-\frac{3\cdot 2a^2b}{(ax+by+cz)^4}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y}=-\frac{6a^2b^2}{(ax+by+cz)^4}。$$

(5) $$\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\partial y^q}=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{\partial^q z}{\partial y^q}\right)=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left((x-a)^p\frac{\partial^q (y-b)^q}{\partial y^q}\right)$$

$$=\frac{d^p (x-a)^p}{dx^p}\frac{d^q (y-b)^q}{dy^q}=p!q!。$$

(6) 对 $x$，$y$，$z$ 应用 Leibniz 公式，

$$\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\frac{\partial^p (xe^x)}{\partial x^p}\frac{\partial^q (ye^y)}{\partial y^q}\frac{\partial^r (ze^z)}{\partial z^r}=\frac{d^p (xe^x)}{dx^p}\frac{d^q (ye^y)}{dy^q}\frac{d^r (ze^z)}{dz^r}。$$

$$=(x+p)e^x\cdot(y+q)e^y\cdot(z+r)e^z$$

$$=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}。$$

17．计算下列函数的高阶微分：

（1） $z=x\ln(xy)$，求 $\mathrm{d}^2 z$ ；

（2） $z=\sin^2(ax+by)$，求 $\mathrm{d}^3 z$ ；

（3） $u=\mathrm{e}^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2)$，求 $\mathrm{d}^3 u$ ；；

（4） $z=\mathrm{e}^x\sin y$，求 $\mathrm{d}^k z$。

解　(1) $dz=(\ln(xy)+1)dx+\dfrac{x}{y}dy$，

$$d^2z=\frac{1}{x}dx^2+\frac{2}{y}dxdy-\frac{x}{y^2}dy^2。$$

(2) $dz=2\sin(ax+by)\cos(ax+by)d(ax+by)=\sin 2(ax+by)(adx+bdy)$，

$$d^2z=2\cos 2(ax+by)(adx+bdy)^2，$$

$$d^3z=-4\sin 2(ax+by)(adx+bdy)^3。$$

(3) $du=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)+(2xdx+2ydy+2zdz)]$，

$$d^2u=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)^2+2(2xdx+2ydy+2zdz)(dx+dy+dz)$$

$$+2dx^2+2dy^2+2dz^2]，$$

$$d^3u=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)^3+6(xdx+ydy+zdz)(dx+dy+dz)^2$$

$$+6(dx^2+dy^2+dz^2)(dx+dy+dz)]$$

$$=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+6x+6)dx^3+(x^2+y^2+z^2+6y+6)dy^3$$

$$+(x^2+y^2+z^2+6z+6)dz^3]+3e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+4x+2y+2)dx^2dy$$

$$+(x^2+y^2+z^2+4y+2z+2)dy^2dz+(x^2+y^2+z^2+4z+2x+2)dz^2dx$$

$$+(x^2+y^2+z^2+2x+4y+2)dxdy^2+(x^2+y^2+z^2+2y+4z+2)dydz^2$$

$$+(x^2+y^2+z^2+2z+4x+2)dzdx^2]+6e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z)dxdydz。$$

(4) $d^kz=(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y})^k$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^i e^x}{\partial x^i}dx^i\cdot\frac{\partial^{k-i}\sin y}{\partial y^{k-i}}dy^{k-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}e^x\sin\left(y+\frac{k-i}{2}\pi\right)dx^idy^{k-i}。$$

18．函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy}，及\quad f(0,y)=2\sin y+y^3。$$

求 $f(x,y)$ 的表达式。

解　对 $x$ 积分，得到

$$f(x,y)=x\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+g(y),$$

再将 $f(0,y)=2\sin y+y^3$ 代入上式，得到

$$g(y)=2\sin y+y^3,$$

所以

$$f(x,y)=(2-x)\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+y^3。$$

19．验证：

（1） $z=\mathrm{e}^{-kn^2x}\sin(ny)$ 满足热传导方程 $\frac{\partial z}{\partial x}=k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（2） $u=z\arctan\frac{x}{y}$ 满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$；

证　（1）由

$$\frac{\partial z}{\partial y}=ne^{-kn^2x}\cos(ny)，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-n^2e^{-kn^2x}\sin(ny)，$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-kn^2e^{-kn^2x}\sin(ny)=k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}。$$

（2）由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{yz}{x^2+y^2}，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}，$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{xz}{x^2+y^2}，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}，$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\arctan\frac{x}{y}，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0，$$

得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。$$

20．设 $f(r,t)=t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}$，确定 $\alpha$ 使得 $f$ 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)。$$

解　将

$$\frac{\partial f}{\partial t}=(\alpha t^{\alpha-1}+\frac{1}{4}t^{\alpha-2}r^2)e^{-\frac{r^2}{4t}}，$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{1}{2}t^{\alpha-1}re^{-\frac{r^2}{4t}}，\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)=(-\frac{3}{2}t^{\alpha-1}r^2+\frac{1}{4}t^{\alpha-2}r^4)e^{-\frac{r^2}{4t}}，$$

代入方程，解得

$$\alpha=-\frac{3}{2}。$$

21．求下列向量值函数在指定点的导数：

（1） $\boldsymbol{f}(x)=(a\cos x,b\sin x,cx)^{\mathrm{T}}$，在 $x=\frac{\pi}{4}$ 点；

（2） $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(3x+e^y\cot z,x^3+y^2\tan z)^{\mathrm{T}}$，在$\left(1,2,\frac{\pi}{4}\right)$点；

（3） $\boldsymbol{g}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)^{\mathrm{T}}$，在$(1,\pi)$点。

解 (1) $$\boldsymbol{f}'(x)=(-a\sin x,b\cos x,c)^T,$$

$$\boldsymbol{f}'(\frac{\pi}{4})=(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b,c)^{\mathrm{T}}。$$

(2) $$\boldsymbol{f}'(x,y,z)=\begin{pmatrix}3 & e^y\cot z & -e^y\csc^2 z\\ 3x^2 & 2y\tan z & y^2\sec^2 z\end{pmatrix}，$$

$$\boldsymbol{f}'(1,2,\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix}3 & e^2 & -2e^2\\ 3 & 4 & 8\end{pmatrix}。$$

(3) $$\boldsymbol{g}'(u,v)=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ 0 & 1\end{pmatrix}，$$

$$\mathbf{g}'(1,\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}。$$

22．设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$为向量值函数。

（1）如果坐标分量函数 $f_1(x,y,z)=x,\ f_2(x,y,z)=y,\ f_3(x,y,z)=z$，证明 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵；

（2）写出坐标分量函数的一般形式，使 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵；

（3）如果已知 $\boldsymbol{f}$ 的导数是对角阵$\mathrm{diag}(p(x),q(y),r(z))$，那么坐标分量函数应该具有什么样的形式？

解 （1）由于

$$f_1'(x,y,z)=(1,0,0)，\quad f_2'(x,y,z)=(0,1,0)，\quad f_3'(x,y,z)=(0,0,1)，$$

所以 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵。

(2) 由 $f_1'(x,y,z)=(1,0,0)$，可知 $f_1(x,y,z)$ 与 $y$，$z$ 无关，所以

$$f_1(x,y,z)=x+C_1,$$

同理可得

$$f_2(x,y,z)=y+C_2, \quad f_3(x,y,z)=z+C_3。$$

(3) 由 $f_1'(x,y,z)=(p(x),0,0)$，可知 $f_1(x,y,z)$ 与 $y$，$z$ 无关，所以

$$f_1(x,y,z)=\int p(x)dx,$$

同理可得

$$f_2(x,y,z)=\int q(y)dy, \quad f_3(x,y,z)=\int r(z)dz。$$

# 习题 12.2 多元复合函数的求导法则

1． 利用链式规则求偏导数：

(1) $z=\tan(3t+2x^2-y^2),\quad x=\dfrac{1}{t},\quad y=\sqrt{t}$，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$；

(2) $z=e^{x-2y},\quad x=\sin t,\quad y=t^3$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$；

(3) $w=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$；

(4) $z=u^2\ln v,\quad u=\dfrac{x}{y},\quad v=3x-2y$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(5) $u=e^{x^2+y^2+z^2}$，$z=y^2\sin x$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$；

(6) $w=(x+y+z)\sin(x^2+y^2+z^2)$，$x=te^s$，$y=e^t$，$z=e^{s+t}$，求$\dfrac{\partial w}{\partial s},\dfrac{\partial w}{\partial t}$；

(7) $z=x^2+y^2+\cos(x+y)$，$x=u+v$，$y=\arcsin v$，求$\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$；

以下假设 $f$ 具有二阶连续偏导数。

(8) $u=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；

(9) $u=f(x^2+y^2+z^2)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

(10) $w=f(x,y,z)$，$x=u+v$，$y=u-v$，$z=uv$，求$\dfrac{\partial w}{\partial u},\dfrac{\partial w}{\partial v},\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$。

解 (1) 记$u=3t+2x^2-y^2$，则

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{du}\frac{du}{dt}=\frac{dz}{du}(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt})$$

$$=[3+4x\cdot(-\frac{1}{t^2})-2y\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}]\sec^2 u$$

$$=(2-\frac{4}{t^3})\sec^2(2t+\frac{2}{t^2})\text{。}$$

(2) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=e^{x-2y}\cos t-2e^{x-2y}\cdot 3t^2=z(\cos t-6t^2)$，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=(\cos t-6t^2)\frac{dz}{dt}+z\frac{d}{dt}(\cos t-6t^2)=e^{\sin t-2t^3}[(\cos t-6t^2)^2-\sin t-12t]\text{。}$$

(3) $\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}$

$$=\frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x-\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot(-\sin x)$$

$=e^{ax}\sin x$。

(4) $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3$

$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot(-\frac{x}{y^2})+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}$。

(5) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=u\cdot 2x+u\cdot 2z\cdot y^2\cos x$

$$=e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}(2x+2y^4\sin x\cos x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}=u\cdot 2y+u\cdot 2z\cdot 2y\sin x$$

$=e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}(2y+4y^3\sin^2 x)$。

(6) 记$u=x^2+y^2+z^2$，$v=x+y+z$。则

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$=x(\sin u+2xv\cos u)+0(\sin u+2yv\cos u)+z(\sin u+2zv\cos u)$$

$$=te^s(\sin u+2xv\cos u)+e^{s+t}(\sin u+2zv\cos u)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$=e^s(\sin u+2xv\cos u)+y(\sin u+2yv\cos u)+z(\sin u+2zv\cos u)$$

$=e^s(\sin u+2xv\cos u)+e^t(\sin u+2yv\cos u)+e^{s+t}(\sin u+2zv\cos u)$。

(7) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=[2x-\sin(x+y)]\cdot 1+[2y-\sin(x+y)]\cdot 0$

$=2(u+v)-\sin(u+v+\arcsin v)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}=\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial z}{\partial u})=2-\cos(u+v+\arcsin v)(1+\frac{1}{\sqrt{1-v^2}})$$ 。

(8) 记 $v=xy, w=\frac{x}{y}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=yf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=xf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x\frac{\partial}{\partial x}f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$

$$=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$=\frac{2x}{y^3}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x\frac{\partial}{\partial y}f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{2x}{y^3}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x^2f_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{2x^2}{y^2}f_{12}\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$ 。

(9) 记 $v=x^2+y^2+z^2$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2+y^2+z^2) + 2x\frac{\partial}{\partial x}f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$= 2f'(x^2+y^2+z^2) + 4x^2 f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y\frac{\partial}{\partial x}f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$= 4xyf''(x^2+y^2+z^2)。$$

(10) $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = f_x + f_y + vf_z$，

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = f_x - f_y + uf_z,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} = f_z + \frac{\partial f_x}{\partial u} - \frac{\partial f_y}{\partial u} + u\frac{\partial f_z}{\partial u}$$

$$= f_z + \frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$+ u\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$= f_{xx} + (u+v)f_{xz} - f_{yy} + (u-v)f_{yz} + f_z + uvf_{zz}。$$

2. 设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(x,x^2)=1$， $f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$。

解 在等式 $f(x,x^2)=1$ 两边对 $x$ 求导，有

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = f_x(x,x^2) + 2xf_y(x,x^2) = 0,$$

再将 $f_x(x,x^2)=x$ 代入，即可得到

$$f_y(x,x^2) = -\frac{1}{2}。$$

3. 设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(1,1)=1$， $f_x(1,1)=2$， $f_y(1,1)=3$。如果 $\varphi(x) = f(x, f(x,x))$，求 $\varphi'(1)$。

解 $$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy(x)}{dx},$$

其中

$$y(x)=f(x,x)\text{，}\quad \frac{dy(x)}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\text{。}$$

由于 $y(1)=f(1,1)=1$，以 $x=1$ 代入上述等式，得到

$$\varphi'(1)=f_x(1,1)+f_y(1,1)(f_x(1,1)+f_y(1,1))=17\text{。}$$

4．设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(t)\neq 0$，求 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{f^2(x^2-y^2)}\dfrac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial x}=-\dfrac{2xyf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(x^2-y^2)}-\frac{y}{f^2(x^2-y^2)}\frac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial y}=\frac{1}{f(x^2-y^2)}+\frac{2y^2f'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}\text{，}$$

直接计算可得

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{yf(x^2-y^2)}\text{。}$$

5．设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$， $x=u+v$， $y=u-v$，验证

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}\text{。}$$

证 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y-x}{x^2+y^2}\text{，}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2}=\frac{y+x}{x^2+y^2}\text{，}$$

又由于 $x^2+y^2=(u+v)^2+(u-v)^2=2u^2+2v^2$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}\text{。}$$

6．设 $\varphi$ 和 $\psi$ 具有二阶连续导数，验证

（1） $u=y\varphi(x^2-y^2)$ 满足 $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{y}u$ ；

（2） $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

证 （1） $\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial \varphi(x^2-y^2)}{\partial x}$

$=y\varphi'(x^2-y^2)\frac{\partial (x^2-y^2)}{\partial x}=2xy\varphi'(x^2-y^2)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(x^2-y^2)+y\frac{\partial \varphi(x^2-y^2)}{\partial y}$$

$=\varphi(x^2-y^2)+y\varphi'(x^2-y^2)\frac{\partial (x^2-y^2)}{\partial y}=\varphi(x^2-y^2)-2y^2\varphi'(x^2-y^2)$，

所以

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y}u。$$

（2） $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at)$， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x-at)+\psi''(x+at)$，

$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at)$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at)$，

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}。$$

7．设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，写出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在坐标变换

$$\begin{cases} u=x^2-y^2, \\ v=2xy \end{cases}$$

下的表达式。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial u}+2y\frac{\partial z}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{\partial z}{\partial u}+2x(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x})+2y(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$=2\frac{\partial z}{\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+8xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}，$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial z}{\partial u}-2y(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y})+2x(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=-2\frac{\partial z}{\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-8xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}。$$

由于$u^2+v^2=x^4+2x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2})=4\sqrt{u^2+v^2}(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2})。$$

8．设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$，求$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。

**解** $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}$，$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2}，\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{-x^2y^2}-2x^2y^2e^{-x^2y^2}，\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}。$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}。$$

9．如果函数$f(x,y)$满足：对于任意的实数$t$及$x,y$，成立

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)，$$

那么$f$称为$n$次齐次函数。

（1）证明$n$次齐次函数$f$满足方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf；$$

（2）利用上述性质，对于$z=\sqrt{x^2+y^2}$求出$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$。

**证** 在等式$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$两边对$t$求导，

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial t}=xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)，$$

将$t$=1代入即得到

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf。$$

(2) 由于$z(tx,ty)=tz(x,y)$，所以$n$=1，由（1）

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}。$$

10．设$z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{x}{y}\right)$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$具有二阶

连续导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解　令$u=xy, v=\dfrac{x}{y}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}=xf_1(u,v)-\frac{x}{y^2}f_2(u,v)-\frac{x}{y^2}g'(v)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1(u,v)-\frac{1}{y^2}f_2(u,v)-\frac{1}{y^2}g'(v)+x(f_{11}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_{12}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$-\frac{x}{y^2}[f_{21}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_{22}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}+g''(v)\frac{\partial v}{\partial x}]$$

$$=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$

$$-\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}g''\left(\frac{x}{y}\right)\text{。}$$

11．设向量值函数$\boldsymbol{f}$ ：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$的坐标分量函数为

$$\begin{cases}x=u^2+v^2,\\ y=u^2-v^2,\\ z=uv.\end{cases}$$

向量值函数$\boldsymbol{g}$ ：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$的坐标分量函数为

$$\begin{cases}u=r\cos\theta,\\ v=r\sin\theta.\end{cases}$$

求复合函数$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$的导数。

解　$$\boldsymbol{f}'(u,v)=\begin{pmatrix}2u & 2v\\ 2u & -2v\\ v & u\end{pmatrix}\text{，}\quad \boldsymbol{g}'(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\text{，}$$

所以

$$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})'(r,\theta)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(r,\theta))\boldsymbol{g}'(r,\theta)=\begin{pmatrix}2r\cos\theta & 2r\sin\theta\\ 2r\cos\theta & -2r\sin\theta\\ r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2r & 0\\ 2r\cos 2\theta & -2r^2\sin 2\theta\\ r\sin 2\theta & r^2\cos 2\theta\end{pmatrix}\text{。}$$

12．设$w=f(x,u,v)$，$u=g(y,z)$，$v=h(x,y)$，求$\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial z}$。

解 $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_x+f_v h_x$,

$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f_u g_y+f_v h_y$,

$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=f_u g_z$。

13．设 $z=u^v$， $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ， $v=\arctan\frac{y}{x}$，求 $dz$。

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=vu^{v-1}\frac{x}{x^2+y^2}+u^v\ln u\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=vu^{v-1}\frac{x}{x^2+y^2}-u^v\ln u\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=vu^{v-1}\frac{y}{x^2+y^2}+u^v\ln u\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=vu^{v-1}\frac{y}{x^2+y^2}+u^v\ln u\frac{x}{x^2+y^2},$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=u^{v-1}\left(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}v+\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}u\ln u\right),$$

其中 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$， $v=\arctan\frac{y}{x}$。

14．设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $dz$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}+(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-\arctan\frac{y}{x}}+(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left[(2x+y)dx+(2y-x)dy\right]e^{-\arctan\frac{y}{x}}\text{；}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-\arctan\frac{y}{x}}+(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}\text{。}$$

15．求下列函数的全微分：

（1） $u=f(ax^2+by^2+cz^2)$ ；

（2） $u=f(x+y,xy)$ ；

（3） $u=f\left(\ln(1+x^2+y^2+z^2),e^{x+y+z}\right)$。

解 (1) 令 $v=ax^2+by^2+cz^2$，则

$$du=f'(v)(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz)$$

$$=2f'(ax^2+by^2+cz^2)(axdx+bydy+czdz)\text{。}$$

(2) $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$$=(f_1+yf_2)dx+(f_1+xf_2)dy\text{。}$$

(3) $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

$$=\frac{2f_1}{1+x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz)+(e^{x+y+z}f_2)(dx+dy+dz)\text{。}$$

16．设 $f(t)$ 具有任意阶连续导数，而 $u=f(ax+by+cz)$。对任意正整数 $k$，求 $\mathrm{d}^k u$。

解　当 $k=1$ 时，成立

$$du=f'(ax+by+cz)d(ax+by+cz)=f'(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)\text{，}$$

应用数学归纳法，假设对于 $k$ 成立

$$d^k u=f^{(k)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^k\text{，}$$

则对于 $k+1$ 成立

$$d^{k+1}u=d(d^k u)=d[f^{(k)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^k]$$

$$=f^{(k+1)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^{k+1}\text{。}$$

由数学归纳法可知对任意正整数 $k$ 成立

$$d^k u = f^{(k)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^k \text{。}$$

17. 设函数$z = f(x,y)$在全平面上有定义，具有连续的偏导数，且满足方程

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 0,$$

证明：$f(x,y)$ 为常数。

证 当$r \neq 0$时，

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\, f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\, f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{r}\big(xf_x(x,y) + yf_y(x,y)\big) = 0,$$

所以

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(\theta) \text{。}$$

再利用$f(x,y)$在$(0,0)$点的连续性，得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(\theta) = f(0,0),$$

即$F(\theta)$为常数，所以$f(x,y)$为常数。

18．设$n$元函数$f$在$\mathbf{R}^n$上具有连续偏导数，证明对于任意的$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$，成立下述 **Hadamard** 公式：

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))dt \text{。}$$

证 设$F(t) = f\big(\mathrm{x} + t(\mathrm{y} - \mathrm{x})\big)$，则

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)dt \text{。}$$

由于

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) \frac{\partial(x_i + t(y_i - x_i))}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) \text{。}$$

所以

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F(1) - F(0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))dt \text{。}$$

# 习 题 12.3 Taylor 公式

1. 对函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 应用中值定理证明：存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}。$$

证 设 $(x_0,y_0)=(0,0),\ (\Delta x,\Delta y)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$，对函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 应用微分中值定理（即 $k=0$ 时的 Taylor 公式），可知存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{3}{4}=f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})-f(0,0)=f_x(\theta\Delta x,\theta\Delta y)\Delta x+f_y(\theta\Delta x,\theta\Delta y)\Delta y$$

$$=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}。$$

2. 写出函数 $f(x,y)=3x^3+y^3-2x^2y-2xy^2-6x-8y+9$ 在点 $(1,2)$ 的 Taylor 展开式。

解 $$f(x,y)=3[(x-1)+1]^3+[(y-2)+2]^3-2[(x-1)+1]^2[(y-2)+2]$$

$$-2[(x-1)+1][(y-2)+2]^2-6[(x-1)+1]-8[(y-2)+2]+9$$

$$=-14-13(x-1)-6(y-2)+5(x-1)^2-12(x-1)(y-2)+4(y-2)^2$$

$$+3(x-1)^3-2(x-1)^2(y-2)-2(x-1)(y-2)^2+(y-2)^3。$$

注 本题也可设 $u=x-1,v=y-2$，于是

$$f(x,y)=f(u+1,v+2)$$

$$=3(u+1)^3+(v+2)^3-2(u+1)^2(v+2)-2(u+1)(v+2)^2-6(u+1)-8(v+2)+9,$$

展开后再用 $u=x-1,v=y-2$ 代换回来。

3. 求函数 $f(x,y)=\sin x\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 点的 Taylor 展开式（展开到三阶导数为止）。

解 $$f(x,y)=(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3))$$

$$=xy-\frac{1}{2}xy^2+o\left((\sqrt{x^2+y^2})^3\right)。$$

4. 求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 点的 $n$ 阶 Taylor 展开式，并写出余项。

解 $$f(x,y)=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n,$$

其中$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}e^{\theta(x+y)}$。

5. 设 $f(x,y)=\frac{\cos y}{x},\quad x>0$。

（1）求 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点的 Taylor 展开式（展开到二阶导数），并计算余项 $R_2$；

（2）求 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点的 $k$ 阶 Taylor 展开式，并证明在 $(1,0)$ 点的某个领域内，余项 $R_k$ 满足当 $k\to\infty$ 时，$R_k\to 0$。

解 （1） $f(x,y)=1-(x-1)+(x-1)^2-\frac{1}{2}y^2+R_2$，

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(1+\theta(x-1),\theta y)$$

$$=-\frac{\cos\eta}{\xi^4}(x-1)^3-\frac{\sin\eta}{\xi^3}(x-1)^2y+\frac{\cos\eta}{2\xi^2}(x-1)y^2+\frac{\sin\eta}{6\xi}y^3,$$

其中$\xi=1+\theta(x-1)$，$\eta=\theta y$，$0<\theta<1$。

（2） $f(x,y)=1+\sum_{n=1}^{k}[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^{n-j}(n-j)!\cos(\frac{j}{2}\pi)(x-1)^{n-j}y^j]+R_k$，

$$R_k=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}C_{k+1}^j(-1)^{k+1-j}(k+1-j)!\frac{1}{\xi^{k-j+2}}\cos(\eta+\frac{j}{2}\pi)(x-1)^{k+1-j}y^j。$$

当 $x=1$ 时，$\xi=1$，对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，$R_k\to 0\ (k\to\infty)$ 显然成立；

当 $0<|x-1|<\frac{1}{3}$ 时，$\frac{2}{3}<\xi<\frac{4}{3}$，$\left|\frac{x-1}{\xi}\right|<\frac{1}{2}$，于是对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|R_k|\le\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}(k+1-j)!\frac{1}{|\xi|^{k-j+2}}|x-1|^{k+1-j}|y|^j$$

$$=\frac{1}{|\xi|}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{j!}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1-j}|y|^j\le\frac{1}{|\xi|}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left|\frac{y\xi}{x-1}\right|^j=\frac{1}{|\xi|}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1}e^{\left|\frac{y\xi}{x-1}\right|},$$

因此也成立 $R_k\to 0$ （$k\to\infty$）。

6. 利用 Taylor 公式近似计算 $8.96^{2.03}$ （展开到二阶导数）。

解 考虑 $f(x,y)=(9+x)^{2+y}$ 在 $(0,0)$ 点的 Taylor 公式:

$$f(x,y)=81+18x+81\ln 9\,y+x^2+(9+18\ln 9)xy+\frac{81}{2}\ln^2 9\,y^2+R_2(x,y),$$

于是

$$8.96^{2.03}=f(-0.04,0.03)\approx 81+18(-0.04)+81\ln 9\cdot 0.03$$

$+(-0.04)^2+(9+18\ln 9)\cdot(-0.04)\cdot 0.03+81/2\cdot\ln^2(9)\cdot 0.03^2$

$\approx 85.74$。

7．设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微。$\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上两个线性无关的单位向量（方向）。若

$$\frac{\partial f}{\partial l_i}(x,y)\equiv 0\text{，}\quad i=1,2\text{，}$$

证明：在 $\mathbf{R}^2$ 上 $f(x,y)\equiv$ 常数。

证 设 $\boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha_1,\sin\alpha_1)$，$\boldsymbol{l}_2=(\cos\alpha_2,\sin\alpha_2)$。由于 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微，

$$\frac{\partial f}{\partial l_1}(x,y)=f_x(x,y)\cos\alpha_1+f_y(x,y)\sin\alpha_1\equiv 0\text{，}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_2}(x,y)=f_x(x,y)\cos\alpha_2+f_y(x,y)\sin\alpha_2\equiv 0\text{。}$$

因为 $\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 线性无关，所以

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\end{vmatrix}\neq 0\text{，}$$

因此上面的线性方程组只有零解，即

$$f_x(x,y)\equiv 0\text{，}\quad f_y(x,y)\equiv 0\text{。}$$

于是由推论 12.3.1 知道 $f(x,y)\equiv$ 常数。

8．设 $f(x,y)=\sin\dfrac{y}{x}$（$x\neq 0$），证明：

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)\equiv 0\text{，}\quad k\geq 1\text{。}$$

证 因为

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=x\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\equiv 0,$$

所以当 $k>1$ 时成立

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\equiv 0\text{。}$$

# 习　题 12.4　隐函数

1. 　求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\sin y+e^x-xy^2=0$，求$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$；

(2) $x^y=y^x$，求$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$；

(3) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$；

(4) $\arctan\dfrac{x+y}{a}-\dfrac{y}{a}=0$，求$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}$；

(5) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(6) $e^z-xyz=0$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(7) $z^3-3xyz=a^3$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(8) $f(x+y,y+z,z+x)=0$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(9) $z=f(xz,z-y)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

(10) $f(x,x+y,x+y+z)=0$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

**解**　(1) 设$F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2=0$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}。$$

(2) 设$F(x,y)=x^y-y^x=0$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}。$$

**注**　本题也可先在等式$x^y=y^x$两边取对数，然后设

$$G(x,y)=y\ln x-x\ln y=0。$$

(3) 设$F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}=0$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}。$$

（4）设$F(x,y)=\arctan\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a}=0$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{a^2}{(x+y)^2}\text{，}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{2a^2}{(x+y)^3}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{2a^2}{(x+y)^5}[a^2+(x+y)^2]\text{。}$$

（5）设$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z}\text{，}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}\text{。}$$

（6）设$F(x,y,z)=e^z-xyz=0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy}\text{，}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^z-xy}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y}{e^z-xy}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{yz}{(e^z-xy)^2}\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)=\frac{2y^2z}{(e^z-xy)^2}-\frac{y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{e^z-xy}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{xz}{(e^z-xy)^2}\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)$$

$$=\frac{z}{e^z-xy}+\frac{2xyz}{(e^z-xy)^2}-\frac{xyz^2e^z}{(e^z-xy)^3}\text{。}$$

（7）设$F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3=0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^2-xy}\text{，}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{z^2-xy}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y}{z^2-xy}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{yz}{(z^2-xy)^2}\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{z^2-xy}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{xz}{(z^2-xy)^2}\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)$$

$$=\frac{z^5-2xyz^3-x^2y^2z}{(z^2-xy)^3}\text{。}$$

（8）由$f(x+y,y+z,z+x)=0$即可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1+f_3}{f_2+f_3}，\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_1+f_2}{f_2+f_3}。$$

(9) 设 $F(x,y,z)=z-f(xz,z-y)=0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{zf_1}{1-xf_1-f_2}，\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{f_2}{1-xf_1-f_2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{1-xf_1-f_2}\left[\frac{\partial z}{\partial x}f_1+z\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{11}+z\frac{\partial z}{\partial x}f_{12}\right]$$

$$+\frac{zf_1}{(1-xf_1-f_2)^2}\left[f_1+x\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{11}+x\frac{\partial z}{\partial x}f_{12}+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{21}+\frac{\partial z}{\partial x}f_{22}\right]$$

$$=\frac{1}{1-xf_1-f_2}\left[2\frac{\partial z}{\partial x}f_1+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 f_{11}+2\frac{\partial z}{\partial x}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{12}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 f_{22}\right]。$$

(10) 由 $f(x,x+y,x+y+z)=0$即可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1+f_2+f_3}{f_3}，\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_2+f_3}{f_3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{f_3}\left[f_{11}+f_{12}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{13}+f_{21}+f_{22}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{23}\right]$$

$$+\frac{f_1+f_2}{f_3}\left[f_{31}+f_{32}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{33}\right]$$

$$=-\frac{1}{f_3^3}\left[f_3^2(f_{11}+2f_{12}+f_{22})-2f_3(f_1+f_2)(f_{13}+f_{23})+(f_1+f_2)^2 f_{33}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{1}{f_3}\left[f_{21}+f_{22}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{23}\right]+\frac{f_2}{f_3^2}\left[f_{31}+f_{32}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{33}\right]$$

$$=-\frac{1}{f_3^3}\left[f_3^2(f_{12}+f_{22})-f_2f_3f_{13}+f_2(f_1+f_2)f_{33}-f_3(f_1+2f_2)f_{23}\right]。$$

2．设 $y=\tan(x+y)$确定 $y$ 为 $x$ 的隐函数，验证

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}。$$

证　由

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y')=(1+y^2)(1+y')$$

解出

$$y'=-1-\frac{1}{y^2},$$

再求二阶和三阶导数，有

$$y''=\frac{2}{y^3}y'=-\frac{2}{y^3}-\frac{2}{y^5},$$

$$y'''=\left(\frac{6}{y^4}+\frac{10}{y^6}\right)y'=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}。$$

3．设$\phi$是可微函数，证明由$\phi(cx-az,cy-bz)=0$所确定的隐函数 $z=f(x,y)$满足方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c。$$

**证**　由$\phi(cx-az,cy-bz)=0$可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\phi_1}{-a\phi_1-b\phi_2}=\frac{c\phi_1}{a\phi_1+b\phi_2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c\phi_2}{-a\phi_1-b\phi_2}=\frac{c\phi_2}{a\phi_1+b\phi_2},$$

所以

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c。$$

4．设方程$\phi(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$确定隐函数$z=f(x,y)$，证明它满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy。$$

**证**　由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\phi_1+z\left(-\frac{1}{x^2}\right)\phi_2}{\frac{1}{y}\phi_1+\frac{1}{x}\phi_2}=\frac{yz\phi_2-x^2y\phi_1}{x(x\phi_1+y\phi_2)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z\left(-\frac{1}{y^2}\right)\phi_1+\phi_2}{\frac{1}{y}\phi_1+\frac{1}{x}\phi_2}=\frac{xz\phi_1-xy^2\phi_2}{y(x\phi_1+y\phi_2)},$$

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy。$$

5．求下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\begin{cases}z-x^2-y^2=0,\\ x^2+2y^2+3z^2=4a^2,\end{cases}$ 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$和$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$；

(2) $\begin{cases}xu+yv=0,\\ yu+xv=1,\end{cases}$ 求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$；

(3) $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial x}$；

(4) $\begin{cases}x=u+v,\\ y=u-v,\\ z=u^2v^2,\end{cases}$ 求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$；

(5) $\begin{cases} x = e^u \cos v, \\ y = e^u \sin v, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解 （1）在方程组中对 $x$ 求导，得到

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} - 2x - 2y\dfrac{dy}{dx} = 0, \\ 2x + 4y\dfrac{dy}{dx} + 6z\dfrac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

由此解出

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+6z)}{y(2+6z)}，\quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{1+3z}。$$

再求二阶导数，得到

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(1+6z)}{y(2+6z)} + \frac{x(1+6z)}{y^2(2+6z)}\frac{dy}{dx} + \frac{x(-3)}{2y(1+3z)^2}\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{1}{2y}\left[\frac{1}{1+3z} - \frac{x^2(1+6z)^2}{2y^2(1+3z)^2} - \frac{3x^2}{(1+3z)^3} - 2\right],$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{1+3z} - \frac{3x}{(1+3z)^2}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+3z} - \frac{3x^2}{(1+3z)^3}。$$

(2) 在方程组中对 $x$ 求偏导，得到

$$\begin{cases} u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + v + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

解此方程组，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ux - vy}{y^2 - x^2}，\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{vx - uy}{y^2 - x^2}。$$

在方程组中对 $y$ 求偏导，得到

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}+v+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \end{cases}$$

解此方程组，得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{vx-uy}{y^2-x^2}，\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{ux-vy}{y^2-x^2}。$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2-x^2}\left(u+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{ux-vy}{(y^2-x^2)^2}2x=\frac{2u(x^2+y^2)-4xyv}{(y^2-x^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y^2-x^2}\left(v+x\frac{\partial v}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{vx-uy}{(y^2-x^2)^2}2x=\frac{2v(x^2+y^2)-4xyu}{(y^2-x^2)^2}。$$

(3) 在方程组中对 $x$ 求偏导，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)f_1+\dfrac{\partial v}{\partial x}f_2, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)g_1+2vyg_2\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

解此方程组，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_2g_1+uf_1(2vyg_2-1)}{f_2g_1-(xf_1-1)(2vyg_2-1)}，\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(1-xf_1)g_1-uf_1g_1}{f_2g_1-(xf_1-1)(2vyg_2-1)}。$$

(4) 在方程组中分别对 $x$ 与 $y$ 求偏导，得到

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \text{与} \begin{cases} 0=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1=\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}，$$

解此两方程组，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2} \text{ 与 } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2uv^2\frac{\partial u}{\partial x}+2u^2v\frac{\partial v}{\partial x}=uv(u+v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2uv^2\frac{\partial u}{\partial y}+2u^2v\frac{\partial v}{\partial y}=uv(u-v)\text{。}$$

(5) 在方程组中对 $x$ 求偏导，得到

$$\begin{cases}1=e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0=e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$，

解此方程组，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v,\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v\text{，}$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2(u\cos v-v\sin v)}{e^u}\text{。}$$

在方程组中对 $y$ 求偏导，得到

$$\begin{cases}0=e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ 1=e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y},\end{cases}$$，

解此方程组，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\sin v,\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-u}\cos v\text{，}$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2(v\cos v+u\sin v)}{e^u}\text{。}$$

6．求微分

(1) $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\mathrm{d}z$ ；

(2) $\begin{cases}x+y=u+v,\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{\sin u}{\sin v},\end{cases}$ 求 $\mathrm{d}u$ 与 $\mathrm{d}v$。

解 (1) 直接对等式两边求微分，得到

$$dx+2dy+dz-\frac{1}{\sqrt{xyz}}(yzdx+xzdy+xydz)=0\text{，}$$

由此解出

$$dz=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}dx+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}dy。$$

(2) 直接在方程组中求微分，得到

$$\begin{cases} dx+dy=du+dv, \\ \dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy=\dfrac{\cos u}{\sin v}du-\dfrac{\sin u\cos v}{\sin^2 v}dv, \end{cases}$$

解此方程组，得到

$$du=\frac{\sin v+x\cos v}{x\cos v+y\cos u}dx+\frac{x\cos v-\sin u}{x\cos v+y\cos u}dy,$$

$$dv=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u}dx+\frac{y\cos u+\sin u}{x\cos v+y\cos u}dy。$$

7． 设$\begin{cases} x=x(y), \\ z=z(y) \end{cases}$是由方程组$\begin{cases} F(y-x,\ y-z)=0, \\ G\left(xy,\dfrac{z}{y}\right)=0 \end{cases}$所确定的向量值隐函数，其中二元函数$F$和$G$分别具有连续的偏导数，求$\dfrac{dx}{dy}$和$\dfrac{dz}{dy}$。

解 (1) 在方程组中对$y$求导数，有

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{dx}{dy}\right)F_1+\left(1-\dfrac{dz}{dy}\right)F_2=0, \\ \left(x+y\dfrac{dx}{dy}\right)G_1+\left(-\dfrac{z}{y^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{dz}{dy}\right)G_2=0, \end{cases},$$

解此方程组，得到

$$\frac{dx}{dy}=\frac{yF_1G_2+xy^2F_2G_1+(y-z)F_2G_2}{y(F_1G_2-y^2F_2G_1)},$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{zF_1G_2-y^3F_2G_1-y^2(x+y)F_1G_1}{y(F_1G_2-y^2F_2G_1)}。$$

8．设$f(x,y)$具有二阶连续偏导数。在极坐标$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$变换下，求

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

关于极坐标的表达式。

解　　经计算，有

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\text{，}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)-\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}-r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$$

$$+r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$$

$$=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\text{，}$$

容易验证

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\text{。}$$

9．设二元函数 $f$ 具有二阶连续偏导数。证明：通过适当线性变换

$$\begin{cases}u=x+\lambda y,\\ v=x+\mu y,\end{cases}$$

可以将方程

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\qquad（AC-B^2<0）.$$

化简为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0\text{。}$$

并说明此时 $\lambda,\mu$ 为一元二次方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 的两个相异实根。

证　经计算，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\text{，}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial u}+\mu\frac{\partial f}{\partial v}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}，$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\lambda\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}，$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\mu\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}，$$

所以

$$0=A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=(A+2B\lambda+C\lambda^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(A+2B\mu+C\mu^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2[A+B(\lambda+\mu)+C\lambda\mu]\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}。$$

由条件$AC-B^2<0$知一元二次方程$A+2Bt+Ct^2=0$有两个相异实根，所以只要取$\lambda,\mu$为方程的两个相异实根。此时由$\lambda+\mu=-\frac{2B}{C}$与$\lambda\mu=\frac{A}{C}$，可得

$$A+B(\lambda+\mu)+C\lambda\mu=2\frac{AC-B^2}{C}\neq 0，$$

于是原方程化简为$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0$。

10． 通过自变量变换$\begin{cases}x=e^{\xi},\\ y=e^{\eta}\end{cases}$变换方程

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0，\quad a,b,c\text{为常数。}$$

解 由$\xi=\ln x,\eta=\ln y$，可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \xi}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial \eta}，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \xi}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\partial \xi}。$$

代入原方程，得到

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0。$$

11．通过自变量变换$\begin{cases}u=x-2\sqrt{y},\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y},\quad y>0。$$

解　经计算，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2\sqrt{y^3}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)。$$

代入原方程，得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0，$$

所以原方程变换为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0。$$

12．导出新的因变量关于新的自变量的偏导数所满足的方程：

（1）用$\begin{cases}u=x^2+y^2,\\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\end{cases}$ 及$w=\ln z-(x+y)$变换方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z\ ；$$

（2）用$\begin{cases}u=x,\\ v=x+y\end{cases}$及$w=x+y+z$变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\ ；$$

（3）用$\begin{cases}u=x+y,\\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}$及$w=\dfrac{z}{x}$变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0。$$

解　（1）由$w=\ln z-(x+y)$得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(\frac{\partial w}{\partial x}+1\right)=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\frac{\partial w}{\partial y}+1\right)=z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)。$$

代入

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$$

得到

$$z\left(2xy\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+y\right)-z\left(2xy\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+x\right)-z(y-x)=0,$$

化简后得到

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0。$$

(2) 由 $w=x+y+z$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}-1=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}-1=\frac{\partial w}{\partial v}-1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}。$$

代入

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(\frac{v}{u}-1)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0。$$

(3) 由 $w=\frac{z}{x}$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=w+x\frac{\partial w}{\partial x}=w+\left(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)$$

$$=2\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial^2 u}+(1-\frac{y}{x})\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\text{。}$$

代入

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\text{，}$$

得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0\text{。}$$

13．设 $y=f(x,t)$，而 $t$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 $x,y$ 的隐函数，其中 $f$ 和 $F$ 都具有连续偏导数。证明

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}\text{。}$$

证　设由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的隐函数为 $t=h(x,y)$，于是就由方程 $y=f(x,t)=f\left(x,h(x,y)\right)$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，并由此可知 $t$ 也是 $x$ 的一元函数，即 $t=h\left(x,y(x)\right)=t(x)$。

首先在等式 $F(x,y,t)=F\left(x,y(x),t(x)\right)=0$ 两边对 $x$ 求导，得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dx}=0\text{，}$$

解出

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\text{，}$$

然后再在等式 $y=f\left(x,t(x)\right)$ 两边对 $x$ 求导，得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{-1},$$

从而解出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}。$$

14. 设二元函数 $f(x,y):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 具有连续偏导数，证明：存在一对一的连续的向量值函数 $\mathbf{G}(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$，使得

$$f\circ\mathbf{G}\equiv\text{常数}。$$

**证** 若函数 $f(x,y)$ 恒等于常数，则任意的一对一的连续的向量值函数 $\mathbf{G}(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$（例如 $\mathbf{G}(t)=(t,t)$）都满足要求。

现假设函数 $f(x,y)$ 不恒等于常数，则存在 $(x_0,y_0)$，使得 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 不全为 0，不妨设 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$。记 $F(x,y)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$，它满足定理 12.4.1 的所有条件，所以在 $x_0$ 的邻域 $(a,b)$ 存在严格单调的连续函数 $y=g(x)$ 满足 $F(x,g(x))\equiv 0$，即 $f(x,g(x))\equiv$ 常数。

设 $t=\tan\pi\left(\frac{x-a}{b-a}-\frac{1}{2}\right)$ 的逆函数为 $x=x(t):(-\infty,+\infty)\to(a,b)$，则

$$\boldsymbol{G}(t)=\left(x(t),g(x(t))\right)$$

是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 的一对一的连续的向量值函数，满足题目要求。

# 习 题 12.5 偏导数在几何中的应用

1． 求下列曲线在指定点处的切线与法平面方程：

（1）$\begin{cases} y = x^2, \\ z = \dfrac{x}{1+x}. \end{cases}$ 在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点；

（2）$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4\sin\dfrac{t}{2}. \end{cases}$ 在$t = \dfrac{\pi}{2}$的点；

（3）$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$ 在$(1,-2,1)$点；

（4）$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$ 在$\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$点。

解 （1）曲线的切向量函数为$(1, 2x, \dfrac{1}{(1+x)^2})$，在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点的切向量为$(1, 2, \dfrac{1}{4})$。于是曲线在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点的切线方程为

$$2(x-1) = y - 1 = 4(2z-1)，$$

法平面方程为

$$8x + 16y + 2z = 25。$$

（2）曲线的切向量函数为$(1-\cos t, \sin t, 2\cos\dfrac{t}{2})$，在$t = \dfrac{\pi}{2}$对应点的切向量为$(1,1,\sqrt{2})$。于是曲线在$t = \dfrac{\pi}{2}$对应点的切线方程为

$$x - \frac{\pi}{2} + 1 = y - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}z - 2，$$

法平面方程为

$$(x - \frac{\pi}{2} + 1) + (y-1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0。$$

（3）曲线的切向量函数为$2(y-z, z-x, x-y)$，在$(1,-2,1)$点的切向量为$(-6, 0, 6)$。于是曲线在$(1,-2,1)$点的切线方程为

$$\begin{cases} x+z=2 \\ y=-2 \end{cases},$$

法平面方程为

$$x=z。$$

（4）曲线的切向量函数为 $4(yz,-xz,-xy)$，在 $\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 点的切向量为 $2R^2(1,-1,-1)$。于是曲线在 $\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 点的切线方程为

$$x-\frac{R}{\sqrt{2}}=-y+\frac{R}{\sqrt{2}}=-z+\frac{R}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$x-y-z+\frac{\sqrt{2}}{2}R=0。$$

2.在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求一点，使曲线在这一点的切线与平面 $x+2y+z=10$ 平行。

解 曲线的切向量为 $(1,2t,3t^2)$，平面的法向量为 $(1,2,1)$，由题设，

$$(1,2t,3t^2)\cdot(1,2,1)=1+4t+3t^2=0,$$

由此解出 $t=-1$ 或 $-\frac{1}{3}$，于是

$$(-1,1,-1) \quad 和 \quad (-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$$

为满足题目要求的点。

3. 求曲线 $x=\sin^2 t,\ y=\sin t\cos t,\ z=\cos^2 t$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 所对应的点处的切线的方向余弦。

解曲线的切向量函数为 $(\sin 2t,\cos 2t,-\sin 2t)$，将 $t=\frac{\pi}{2}$ 代入得 $(0,-1,0)$，它是单位向量，所以是方向余弦。

4. 求下列曲面在指定点的切平面与法线方程：

（1） $z=2x^4+3y^3$，在点 $(2,1,35)$；

（2） $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$，在点 $(\ln 2,\ln 2,1)$；

（3） $x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3$，在点 $u=0,\ v=1$ 所对应的点。

解（1）曲面的法向量函数为 $(8x^3,9y^2,-1)$，以 $(x,y,z)=(2,1,35)$ 代入，得

到$(64,9,-1)$，所以切平面方程为

$$64(x-2)+9(y-1)-(z-35)=0\text{，即 } 64x+9y-z-102=0\text{，}$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{64}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-35}{-1}\text{。}$$

（2）曲面的法向量函数为$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}\frac{1}{z},\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\frac{1}{z},-\frac{x}{z^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}-\frac{y}{z^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\right)$，以$(x,y,z)$ $=(\ln 2,\ln 2,1)$代入，得到$(2,2,-4\ln 2)$，所以切平面方程为

$$x-\ln 2+y-\ln 2-2\ln 2(z-1)=0\text{，即 } x+y-2z\ln 2=0\text{，}$$

法线方程为

$$x-\ln 2=y-\ln 2=-\frac{1}{2\ln 2}(z-1)\text{。}$$

（3）由于$J=\begin{pmatrix}1&1\\2u&2v\\3u^2&3v^2\end{pmatrix}$，所以在$u=0,\ v=1$所对应的点处的法向量为 $(0,-3,2)$，所以切平面方程为

$$-3(y-1)+2(z-1)=0\text{，即 } -3y+2z+1=0\text{，}$$

法线方程为

$$\begin{cases}x-1=0,\\ \dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{2}\end{cases}\text{，即 }\begin{cases}x=1\\ 2y+3z=5\end{cases}\text{。}$$

5. 在马鞍面$z=xy$上求一点，使得这一点的法线与平面$x+3y+z+9=0$垂直，并写出此法线的方程。

解　马鞍面的法向量$(y,x,-1)$与$(1,3,1)$平行，所以$\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}$，即 $y=-1,x=-3,z=xy=3$，于是该点为$(-3,-1,3)$，在该点处的法线方程为

$$x+3=\frac{1}{3}(y+1)=z-3\text{。}$$

6. 求椭球面$x^2+2y^2+3z^2=498$的平行于平面$x+3y+5z=7$的切平面。

解　由于椭球面的法向量$(2x,4y,6z)$与$(1,3,5)$平行，所以$\frac{x}{1}=\frac{2y}{3}=\frac{3z}{5}$，

解出$y=\frac{3}{2}x, z=\frac{5}{3}x$，代入椭球面方程可得$x=\pm 6$，即切点为$\pm(6,9,10)$。所以有两个切平面满足条件，切平面的方程分别为

$$(x-6)+3(y-9)+5(z-10)=0 \quad 与 \quad (x+6)+3(y+9)+5(z+10)=0$$

即

$$x+3y+5z\pm 83=0。$$

7. 求圆柱面$x^2+y^2=a^2$与马鞍面$bz=xy$的交角。

解　设$(x,y,z)$是圆柱面与马鞍面交线上一点。圆柱面在该点的的法向量为$(2x,2y,0)$，马鞍面在该点的的法向量为$(y,x,b)$，于是两法向量的夹角$\theta$的余弦为

$$\cos\theta=\frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}}\cdot\frac{(y,x,-b)}{\sqrt{x^2+y^2+b^2}}=\frac{2xy}{a\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以

$$\theta=\arccos\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}}。$$

8. 已知曲面$x^2-y^2-3z=0$，求经过点$A(0,0,-1)$且与直线$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$平行的切平面的方程。

解　设切点为$(x_0,y_0,z_0)$，　则曲面在该点的法向量为$(2x_0,-2y_0,-3)$，切平面方程为

$$2x_0x-2y_0y-3(z+1)=0。$$

由于切点在切平面上，所以$2x_0^2-2y_0^2-3(z_0+1)=0$，与曲面方程相比较可得$z_0=1$。由于切平面与直线平行，所以

$$(2x_0,-2y_0,-3)\cdot(2,1,2)=4x_0-2y_0-6=0,$$

与曲面方程联立，并注意到$z_0=1$，可以求出切点坐标为$(2,1,1)$。于是，切平面方程为

$$4x-2y-3z-3=0。$$

9．设椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 $P$ 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数。

解　曲面的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\dfrac{(4x,6y,2z)}{\|(4x,6y,2z)\|}$，将点 $P(1,1,1)$ 的坐标代入，得到 $\boldsymbol{n}=\dfrac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}$。于是，函数 $u$ 在点 $P$ 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{8}{\sqrt{14}},-\sqrt{14}\right)\cdot\frac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}。$$

10．证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ \ (a>0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 $a$。

证　设切点为 $(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在该点的法向量为 $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}},\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}},\dfrac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$，切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

所以截距之和为

$$\sqrt{x_0}\sqrt{a}+\sqrt{y_0}\sqrt{a}+\sqrt{z_0}\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a。$$

11．证明：曲线

$$\begin{cases}x=a\mathrm{e}^t\cos t,\\ y=a\mathrm{e}^t\sin t,\\ z=a\mathrm{e}^t\end{cases}$$

与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同。

解　易知曲线的切向量为 $ae^t(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,1)$，锥面的母线方向为 $(x,y,z)=ae^t(\cos t,\sin t,1)$，假定它们的夹角为 $\theta$，则

$$\cos\theta=\frac{(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,1)\cdot(\cos t,\sin t,1)}{\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1^2}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}。$$

12．证明曲面 $f(ax-bz,ay-cz)=0$ 上的切平面都与某一定直线平行，其中函数 $f$ 连续可微，且常数 $a,b,c$ 不同时为零。

**证** 曲面的法向量为 $(af_1,af_2,-bf_1-cf_2)$，由于 $(af_1,af_2,-bf_1-cf_2)\cdot(b,c,a)\equiv 0$，所以曲面的法向量与非零向量 $(b,c,a)$ 垂直，即曲面的切平面都与向量 $(b,c,a)$ 平行，也就是与以此向量为方向的直线平行。

13．证明曲面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $(x\neq 0)$ 在任一点处的切平面都通过原点，其中函数 $f$ 连续可微。

**证** 易知曲面上任意一点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\left(f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0}),\ f'(\frac{y_0}{x_0}),-1\right),$$

因此过点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面为

$$\left(f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0})\right)(x-x_0)+f'(\frac{y_0}{x_0})(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

容易验证，$(0,0,0)$ 满足上述方程，即所有切平面都经过原点。

14．证明曲面 $F\left(\dfrac{z}{y},\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{x}\right)=0$ 的所有切平面都过某一定点，其中函数 $F$ 具有连续偏导数。

**证** 易知曲面上任意一点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\left(\frac{1}{z_0}F_2-\frac{y_0}{x_0^2}F_3,\frac{1}{x_0}F_3-\frac{z_0}{y_0^2}F_1,\frac{1}{y_0}F_3-\frac{x_0}{z_0^2}F_2\right),$$

因此过点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面为

$$\left(\frac{1}{z_0}F_2-\frac{y_0}{x_0^2}F_3\right)(x-x_0)+\left(\frac{1}{x_0}F_3-\frac{z_0}{y_0^2}F_1\right)(y-y_0)+\left(\frac{1}{y_0}F_3-\frac{x_0}{z_0^2}F_2\right)(z-z_0)=0,$$

容易验证，$(0,0,0)$ 满足上述方程，即所有切平面都经过原点。

15．设 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数，且 $F_x{}^2+F_y{}^2+F_z{}^2\neq 0$。进一步，设 $k$ 为

正整数，$F(x,y,z)$为$k$次齐次函数，即对于任意的实数$t$和$(x,y,z)$，成立

$$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)。$$

证明：曲面$F(x,y,z)=0$上所有点的切平面相交于一定点。

证　利用齐次条件对$t$求导，有

$$xF_x(tx,ty,tz)+yF_y(tx,ty,tz)+zF_z(tx,ty,tz)=kt^{k-1}F(x,y,z),$$

再令$t=1$，得到曲面上的点$(x,y,z)$所满足的恒等式：

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z)。$$

因为曲面上任意一点$(x_0,y_0,z_0)$处的法向量为

$$\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right),$$

于是过点$(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0。$$

利用前面的恒等式，切平面方程化为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)x+F_y(x_0,y_0,z_0)y+F_z(x_0,y_0,z_0)z=kF(x_0,y_0,z_0)=0,$$

显然切平面经过原点，所以原点就是所有切平面的交点。

# 习题 12.6 无条件极值

1. 讨论下列函数的极值：

（1） $f(x,y)=x^4+2y^4-2x^2-12y^2+6$；

（2） $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$；

（3） $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$；

（4） $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^4)$；

（5） $f(x,y)=xy+\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}$，其中常数 $a>0,\quad b>0$；

（6） $f(x,y,z)=x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{2}{z}$ （$x,y,z>0$）。

**解** (1) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x=4x^3-4x=0 \\ f_y=8y^3-24y=0 \end{cases},$$

解得

$$x=0,\pm1;\ \ y=0,\pm\sqrt{3},$$

即函数有 9 个驻点。再由 $f_{xx}=4(3x^2-1)$， $f_{xy}=0$， $f_{yy}=24(y^2-1)$，可知

$$H=96(3x^2-1)(y^2-1)。$$

应用定理 12.6.2。驻点 $(0,0)$， $(1,\sqrt{3})$， $(1,-\sqrt{3})$， $(-1,\sqrt{3})$， $(-1,-\sqrt{3})$ 满足 $H>0$，所以是极值点，而其余驻点不是极值点。再根据 $f_{xx}$ 的符号，可知函数在 $(0,0)$ 点取极大值 $6$；在 $(1,\sqrt{3})$，$(1,-\sqrt{3})$，$(-1,\sqrt{3})$，$(-1,-\sqrt{3})$ 四点取极小值 $-13$。

**注** 本题可使用配方法得到

$$f(x,y)=(x^2-1)^2+2(y^2-3)^2-13,$$

由此易知 $(1,\sqrt{3})$， $(1,-\sqrt{3})$， $(-1,\sqrt{3})$， $(-1,-\sqrt{3})$ 四点为函数的最小值点，最小值为 $-13$，函数无最大值，$(0,0)$ 点为函数的极大值点，极大值为 $6$。

（2）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases},$$

两式相减，可解得 $x = y = 0, \pm 1$，即驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,-1)$ 三点。再由 $f_{xx} = 12x^2 - 2$，$f_{xy} = -2$，$f_{yy} = 12y^2 - 2$，可知

$$H = 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 4。$$

应用定理 12.6.2。驻点 $(1,1)$，$(-1,-1)$ 满足 $H > 0$，所以是极值点，再根据 $f_{xx}$ 的符号，可知函数在 $(1,1)$，$(-1,-1)$ 两点取极小值 $-2$。

在 $(0,0)$ 点，有 $H = 0$，且 $f(0,0) = 0$。由于 $f(x,x) = 2x^2(x^2 - 2)$，$f(x,-x) = 2x^4$，可知函数在 $(0,0)$ 点附近变号，所以 $(0,0)$ 不是极值点。

（3）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \\ f_z = -2z = 0 \end{cases},$$

解得 $(0,0,0)$ 是唯一的驻点。由 $f(0,0,0) = 0$，$f(x,y,0) = x^2 + y^2$，$f(0,0,z) = -z^2$，可知函数在 $(0,0,0)$ 点附近变号，即 $(0,0,0)$ 不是极值点，所以函数无极值点。

**注** 对于二次多项式 $f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，它的 Hesse 矩阵 H 是常数矩阵，我们有如下结论：

设 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的驻点，则由 $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T H (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ 可知

（a） $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为最小值的充分必要条件是 H 为半正定矩阵；

（b） $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为最大值的充分必要条件是 H 为半负定矩阵；

（c） $f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值的充分必要条件是 H 为不定矩阵。

本题由于函数 $f(x,y,z)$ 的 Hesse 矩阵为不定矩阵，所以 $(0,0,0)$ 不是 $f(x,y,z)$ 的极值点。

（4）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 2x(3x^4 - 2yx^2 - y) = 0 \\ f_y = 2y - x^2 - x^4 = 0 \end{cases},$$

解得 $x = y = 0$；$x = \pm 1, y = 1$；$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{8}$，即驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,1)$，$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8})$ 和 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8})$ 五点。再由 $f_{xx} = 30x^4 - 12yx^2 - 2y$，$f_{xy} = -2x - 4x^3$，$f_{yy} = 2$，可知

$$H = 2(30x^4 - 12yx^2 - 2y) - (2x + 4x^3)^2。$$

应用定理 12.6.2。驻点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8})$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8})$ 满足 $H > 0$，所以是极值点，再根据 $f_{xx}$ 的符号，可知函数在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8})$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8})$ 取极小值 $-\frac{1}{64}$。

在 $(1,1)$，$(-1,1)$ 点 $H < 0$，所以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 不是极值点。

在 $(0,0)$ 点 $H = 0$，且 $f(0,0) = 0$。由于 $f(x,x^3) = -x^5(1-x)^2$，易知函数在 $(0,0)$ 点附近变号，所以 $(0,0)$ 不是极值点。

（5）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = y - \dfrac{a^3}{x^2} = 0 \\ f_y = x - \dfrac{b^3}{y^2} = 0 \end{cases},$$

解得 $\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right)$ 是唯一的驻点。再由 $f_{xx} = \frac{2a^3}{x^3}$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = \frac{2b^3}{y^3}$，可知

$$H = \frac{4a^3b^3}{x^3y^3} - 1。$$

应用定理 12.6.2。由于在驻点 $\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right)$ 有 $H > 0$，再根据 $f_{xx}$ 的符号，

可知函数在$(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a})$点取极小值$3ab$。

（6）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 1-\dfrac{y}{x^2}=0 \\ f_y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}=0 \\ f_z=\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases},$$

解得唯一的驻点$\left(2^{\frac14},2^{\frac12},2^{\frac34}\right)$。由于函数在$\left(2^{\frac14},2^{\frac12},2^{\frac34}\right)$点的 Hesse 矩阵

$\begin{pmatrix} 2^{\frac34} & -2^{-\frac12} & 0 \\ -2^{-\frac12} & 2^{\frac14} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & 2^{-\frac14} \end{pmatrix}$是正定的，所以函数在$(2^{\frac14},2^{\frac12},2^{\frac34})$取极小值$4\cdot 2^{\frac14}$。

2．设$f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$，证明函数$f$的最小值为$0$。

**证** 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x=2x-2y+2z=0 \\ f_y=6y-2x=0 \\ f_z=4z+2x=0 \end{cases},$$

解得唯一驻点$(0,0,0)$，由于函数在$(0,0,0)$点的 Hesse 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$是正定的，所以函数在$(0,0,0)$点取极小值$f(0,0,0)=0$。

注　本题可使用配方法得到

$$f(x,y,z)=\frac12(x-2y)^2+\frac12(x+2z)^2+\frac12 y^2,$$

由此可知函数在$(0,0,0)$点取最小值$f(0,0,0)=0$。

3. 证明函数$f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$有无穷多个极大值点，但无极小值点。

**证** 由

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-(1+e^y)\sin x=0 \\ f_y(x,y)=e^y\cos x-(1+y)e^y=0 \end{cases},$$

解得 $x = k\pi$ , $y = \cos k\pi - 1$，所以驻点为

$$(k\pi, \cos k\pi - 1)\text{，}\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\text{。}$$

由 $f_{xx} = -(1+e^y)\cos x$， $f_{xy} = -e^y \sin x$， $f_{yy} = \mathrm{e}^y \cos x - (2+y)\mathrm{e}^y$，可知在驻点 $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 处，

$$H = \cos k\pi (1+e^y)e^y\text{，}$$

所以当 $k$ 为奇数时 $H<0$， $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 不是极值点；当 $k$ 为偶数时 $H>0$，再由 $f_{xx}<0$，可知 $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 是极大值点。所以函数有无穷多个极大值点，但无极小值点。

4．求函数 $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ 在闭区域

$$\mathbf{D} = \{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 2\pi\}$$

上的最大值与最小值。

解 由

$$\begin{cases} f_x = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ f_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases}\text{，}$$

得到 $\cos x = \cos y = \cos(x+y)$。在 $\mathbf{D}^{\circ} = \{(x,y) \mid 0 < x, y < x+y < 2\pi\}$ 上考虑，得到 $x = y = 2\pi - x - y$，即 $\left(\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{2}{3}\pi\right)$ 是函数在区域内部唯一的驻点。由于在区域边界上，即当 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $x+y=2\pi$ 时，有 $f(x,y)=0$，而在区域内部唯一的驻点上取值为 $f(\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{2}{3}\pi) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 0$，根据闭区域上连续函数的性质，可知函数的最大值为 $f_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，最小值为 $f_{\min} = 0$。

5．在 $[0,1]$ 上用怎样的直线 $\xi = ax+b$ 来代替曲线 $y = x^2$，才能使它在平方误差的积分

$$J(a,b) = \int_0^1 (y-\xi)^2 dx$$

为极小意义下的最佳近似。

解 $$J(a,b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}(a^2 - 2b) + ab + b^2$$

是 $a,b$ 的二次多项式，它的 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是正定的，所以有最小值（见第 1 题（3）的注）。对参数 $a,b$ 求导，

$$\begin{cases} J_a = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2} + b = 0 \\ J_b = a + 2b - \dfrac{2}{3} = 0 \end{cases},$$

得到$a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$，即$\left(1, -\dfrac{1}{6}\right)$是唯一的驻点，所以必定是最小值点。因此最佳直线为$\xi = x - \dfrac{1}{6}$。

6．在半径为$R$的圆上，求内接三角形的面积最大者。

解　设圆内接三角形的各边所对的圆心角为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，则三角形的面积为

$$S = \frac{R^2}{2}[\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3] = \frac{R^2}{2}[\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 - \sin(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

由第 4 题知$\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{2\pi}{3} = \alpha_3$时面积最大，这时圆内接三角形为正三角形，$S_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$。

7．要做一圆柱形帐幕，并给它加一个圆锥形的顶。问：在体积为定值时，圆柱的半径$R$，高$H$，及圆锥的高$h$满足什么关系时，所用的布料最省？

解　由帐幕的体积$V = \pi R^2 H + \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$，得到$H = \dfrac{V}{\pi R^2} - \dfrac{1}{3}h$，于是帐幕的表面积为

$$S = 2\pi RH + \pi R\sqrt{R^2 + h^2} = \frac{2V}{R} - \frac{2\pi Rh}{3} + \pi R\sqrt{R^2 + h^2}。$$

对$R$与$h$求偏导数，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial h} = -\dfrac{2\pi R}{3} + \dfrac{\pi Rh}{\sqrt{R^2 + h^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial R} = -\dfrac{2V}{R^2} - \dfrac{2\pi h}{3} + \pi\sqrt{R^2 + h^2} + \dfrac{\pi R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} = 0 \end{cases}。$$

由第一个方程，得到$R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}h$，再将$R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}h$与$V = \pi R^2 H + \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$代入第

二个方程，得到$H=\frac{1}{2}h$，所以当$\frac{R}{\sqrt{5}}=\frac{H}{1}=\frac{h}{2}$时，布料最省。

8．求由方程$x^2+2xy+2y^2=1$所确定的隐函数$y=y(x)$的极值。

解　由

$$y'=-\frac{x+y}{x+2y}=0,$$

得到$x+y=0$，再代入$x^2+2xy+2y^2=1$得到$y^2=1$，由此可知隐函数$y=y(x)$的驻点为$x=\pm1$，且当$x=\pm1$时有$y=\mp1$。

由于在驻点有

$$y''=-\frac{1+y'}{x+2y}+\frac{(x+y)}{(x+2y)^2}(1+2y')=-\frac{1}{y},$$

根据$y''(\pm1)$的符号可知$y=y(x)$在$x=-1$取极大值$1$，在$x=1$取极小值$-1$。

注　本题也可由

$$x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2=1,$$

得到$-1\le y\le 1$，由此可知$y=y(x)$在$x=-1$取极大值$1$，在$x=1$取极小值$-1$。

9．求由方程$2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值。

解　由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{4x}{1-2z-8y}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{4(y+2z)}{1-2z-8y}=0\end{cases},$$

得到$x=0$与$y+2z=0$，再代入$2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$，得到$7z^2+z-8=0$即$z=1,-\frac{8}{7}$。由此可知隐函数$z=z(x,y)$的驻点为$(0,-2)$与$(0,\frac{16}{7})$。

由

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4}{1-2z-8y}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4}{1-2z-8y}，$$

可知在驻点$(0,-2)$与$(0,\frac{16}{7})$有$H>0$。

在$(0,-2)$点，$z=1$，因此$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4}{15}>0$，所以$(0,-2)$为极小值点，极小值为$z=1$；在$(0,\frac{16}{7})$点，$z=-\frac{8}{7}$，因此$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4}{15}<0$，所以$(0,\frac{16}{7})$为极大值点，极大值为$z=-\frac{8}{7}$。

**注 1** 原方程可以改写为

$$2x^2+2(y+2z)^2=(z-1)(7z+8)，$$

由左边非负可得$(z-1)(7z+8)\ge 0$，即$z\le -\frac{8}{7}$或者$z\ge 1$。

**注 2** 在三维空间中，方程的图像是双叶双曲面，由两个不相连的部分组成。其中之一开口向上，最小值$z=1$，另一个开口向下，最大值$z=-\frac{8}{7}$。

10．在$Oxy$平面上求一点，使它到三直线$x=0$，$y=0$，和$x+2y-16=0$的距离的平方和最小。

解 平面上点$(x,y)$到三直线的距离平方和为

$$D(x,y)=x^2+y^2+(\frac{x+2y-16}{\sqrt{5}})^2。$$

对$x,y$求偏导数，

$$\begin{cases} D_x=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0, \\ D_y=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0, \end{cases}$$

得到$x=\frac{8}{5}, y=\frac{16}{5}$，所以函数只有一个驻点$(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$。

由于

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} D(x,y)=+\infty，$$

可知函数$D(x,y)$在驻点$(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$有最小值。

11．证明：圆的所有外切三角形中，以正三角形的面积为最小。

**证** 设圆半径为$1$，外切三角形的两个顶角为$2\alpha$与$2\beta$，则三角形的面积为

$$S=\cot\alpha+\cot\beta+\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)=\cot\alpha+\cot\beta+\tan(\alpha+\beta)。$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial\alpha}=-\csc^2\alpha+\sec^2(\alpha+\beta)=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial\beta}=-\csc^2\beta+\sec^2(\alpha+\beta)=0,\end{cases}，$$

得到$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$，所以

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}，$$

即外切正三角形的面积为最小。

12．证明：圆的所有内接$n$边形中，以正$n$边形的面积为最大。

**证** 设圆半径为$1$，圆内接$n$边形的各边所对的圆心角为$\alpha_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，则$n$边形的面积为

$$S=\frac{1}{2}[\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{n-1}-\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})]。$$

由

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}=\frac{1}{2}[\cos\alpha_1-\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})]=0，\quad(k=1,2,\cdots,n-1)，$$

推出

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})，$$

所以

$$\alpha_k=\frac{2\pi}{n}\text{，}\quad (k=1,2,\cdots,n)\text{，}$$

即内接正$n$边形的面积为最大。

13．证明：当$0<x<1,\ 0<y<+\infty$时，成立不等式

$$yx^y(1-x)<\mathrm{e}^{-1}\text{。}$$

证 令$f(x,y)=yx^y(1-x)$，对$y$求偏导，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^y(1-x)(1+y\ln x)=0\text{，}$$

解得$y=\dfrac{-1}{\ln x}$。对固定的$x\in(0,1)$，根据$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在$y=\dfrac{-1}{\ln x}$附近的符号变化，可知 $f(x,y)$ （作为 $y$ 的函数）的极大值点为 $y=\dfrac{-1}{\ln x}$，极大值为$\varphi(x)=\dfrac{-(1-x)}{e\ln x}$。再对$\varphi(x)$求导，得到

$$\varphi'(x)=\frac{1}{ex\ln^2 x}(1-x+x\ln x)\text{。}$$

记

$$g(x)=1-x+x\ln x,\ \ x\in(0,1)\text{，}$$

则$g'(x)=\ln x<0$， $g(0+)=1, g(1-)=0$，所以$g(x)>0$，于是$\varphi(x)$严格单调增加。再由$\lim\limits_{x\to 1-}\varphi(x)=e^{-1}$，得到

$$f(x,y)\le\varphi(x)<e^{-1}\qquad (0<x<1,0<y<+\infty)\text{。}$$

14．某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养$x$（万尾），乙种鱼放养$y$（万尾），收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3-\alpha x-\beta y)x\ \ \text{和}\ \ (4-\beta x-2\alpha y)y\qquad (\alpha>\beta>0)\text{。}$$

求使产鱼总量最大的放养数。

解 鱼总产量为

$$P=(3-\alpha x-\beta y)x+(4-\beta x-2\alpha y)y=-\alpha x^2-2\beta xy-2\alpha y^2+3x+4y\text{。}$$

对$x,y$求偏导数，

$$\begin{cases}P_x=-2\alpha x-2\beta y+3=0,\\ P_y=-2\beta x-4\alpha y+4=0,\end{cases}\text{，}$$

解得

$$x=\frac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2}，\quad y=\frac{4\alpha-3\beta}{4\alpha^2-2\beta^2}。$$

因为$P=-\alpha x^2-2\beta xy-2\alpha y^2+3x+4y$是二次多项式，由

$$H=(-2\alpha)(-4\alpha)-(2\beta)^2=4(2\alpha^2-\beta^2)>0，\quad P_{xx}=-2\alpha<0，$$

可知其 Hesse 矩阵是负定的，所以函数有最大值，即当$x=\dfrac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2}$，$y=\dfrac{4\alpha-3\beta}{4\alpha^2-2\beta^2}$时产鱼总量最大。

## 12.6　计算实习题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1．　某种机器零件的加工需经两道工序，$x$表示零件在第一道工序中出现的疵点数（疵点指气泡、砂眼、裂痕等），$y$表示在第二道工序中出现的疵点数。某日测得 8 个零件的$x$与$y$如下：

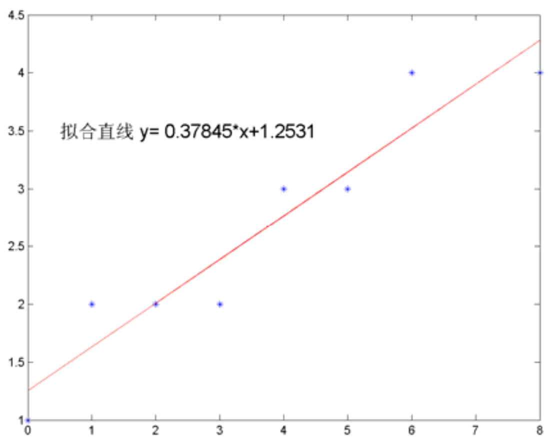
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 8 | 5 | 4 | 2 |
| $y$ | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式$y = ax + b$，并画出拟合曲线。

解　程序代码为

```
hold off
x=[0,1,3,6,8,5,4,2];
y=[1,2,2,4,4,3,3,2];
plot(x,y,'b*')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a*x+b;
plot(x,y,'r')
string=['拟合直线  y=',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(0.5,3.5,str,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线$y= 0.37845x+1.2531$。图形为




2．某品种大豆的脂肪含量$x(\%)$与蛋白质含量$y(\%)$的测定结果如下表所示：程序代码为

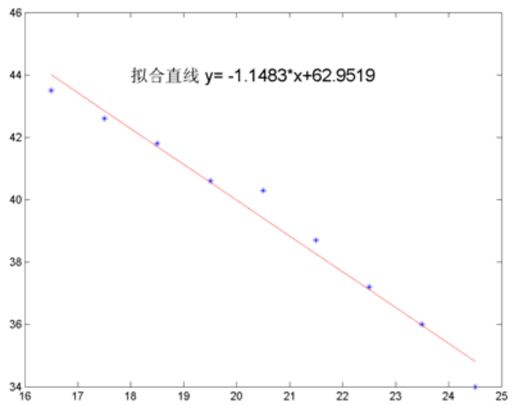
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 16.5 | 17.5 | 18.5 | 19.5 | 20.5 | 21.5 | 22.5 | 23.5 | 24.5 |
| $y$ | 43.5 | 42.6 | 41.8 | 40.6 | 40.3 | 38.7 | 37.2 | 36.0 | 34.0 |

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式，并画出拟合曲线。

解　程序代码为

```
hold off
x=[16.5,17.5,18.5,19.5,20.5,21.5,22.5,23.5,24.5];
y=[43.5,42.6,41.8,40.6,40.3,38.7,37.2,36.0,34.0];
plot(x,y,'b*')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a*x+b;
plot(x,y,'r')
str=['拟合直线  y= ',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(18,44,str,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $y = -1.1483x+62.9519$。图形为




3．某种产品加工前的含水率（%）与加工后含水率（%）的测试结果如下表：

| 测试编号 $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 加工前的含水率 $x_i$ | 16.7 | 18.2 | 18.0 | 17.9 | 17.4 | 16.6 | 17.2 | 17.7 | 15.7 | 17.1 |
| 加工后的含水率 $y_i$ | 17.5 | 18.7 | 18.6 | 18.5 | 18.2 | 17.5 | 18.0 | 18.2 | 16.9 | 17.8 |

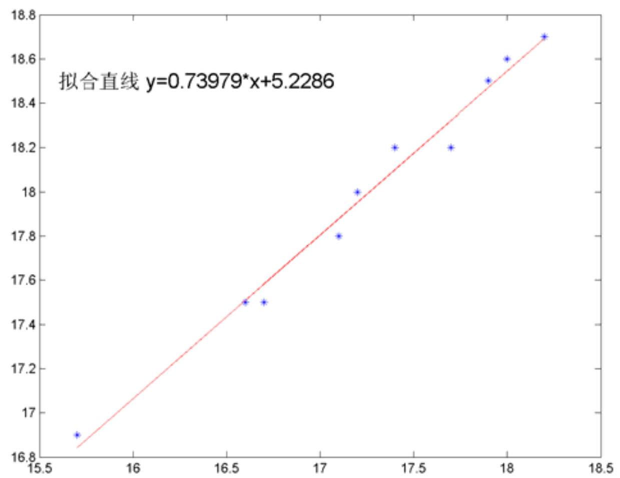
试确定加工后的含水率 $y$ 与加工前含水率 $x$ 的关系。

解　程序代码为

```
hold off
x=[16.7,18.2,18.0,17.9,17.4,16.6,17.2,17.7,15.7,17.1];
y=[17.5,18.7,18.6,18.5,18.2,17.5,18.0,18.2,16.9,17.8];
plot(x,y,'b*')
hold on
```

```
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a*x+b;
plot(x,y,'r')
str=['拟合直线  y=',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(15.6,18.5,str,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $y= 0.73979x+5.2286$。图形为




4．盛钢水的钢包，在使用过程中由于钢水对耐火材料的浸蚀，容积会不断增大。在生产过程中，积累了使用次数与钢包容积增大之间的以下 16 组数据。画出这些数据的散点图，找出使用次数 $x$ 与钢包容积增大 $y$ 之间的关系，并画出拟合曲线。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y$ | 6.42 | 8.20 | 9.58 | 9.50 | 9.70 | 10.00 | 9.93 | 9.99 |
| $x$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| $y$ | 10.50 | 10.59 | 10.60 | 10.63 | 10.60 | 10.90 | 10.76 | 10.80 |

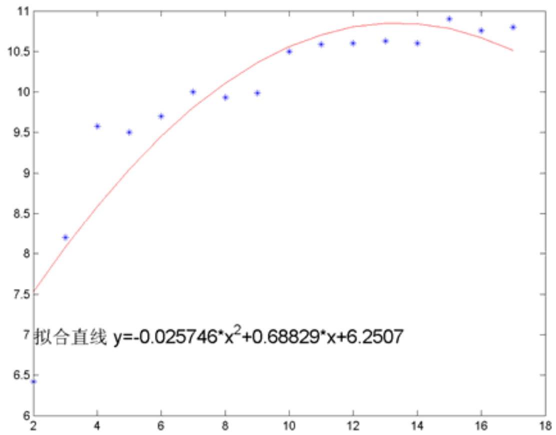
（提示：假设 $y = ax^2 + bx + c$。）

解　程序代码为

```
hold off
x=2:17;
y=[6.42,8.20,9.58,9.50,9.70,10.00,9.93,9.99,10.50,10.59,10.60,10.63,10.6
    0,10.90,10.76,10.80];
plot(x,y,'b*')
A=[x.^2',x',ones(size(x))'];
a=A\y'
hold on
y=a(1)*x.^2+a(2)*x+a(3)
plot(x,y,'r')
string=['拟合直线  y=',
```

```
num2str(a(1)),'*x^2+',num2str(a(2)),'*x+',num2str(a(3))];
text(5,8,string)
```

运行后，得拟合曲线 $y = -0.025746x^2 + 0.68829x + 6.2507$，图形为




5．在研究化学反应速度时，得到下列数据。找出实验开始后的时间 $t$ 与反应物的量 $m$ 之间的关系，并画出拟合曲线。

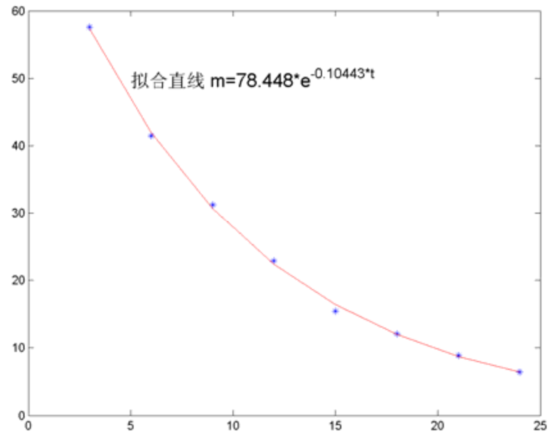
| $t$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 57.6 | 41.5 | 31.2 | 22.9 | 15.4 | 12.1 | 8.9 | 6.4 |

（提示：$m$ 与 $t$ 的关系为 $m = a\mathrm{e}^{bt}$。）

解　程序代码为

```
hold off
x=3:3:24;
y=[57.6,41.5,31.2,22.9,15.4,12.1,8.9,6.4];
plot(x,y,'b*')
hold on
y1=log(y);
A=[x',ones(size(x))'];
a=A\y1';
y=exp(a(2))*exp(a(1)*x)；
plot(x,y,'r')
string=['拟合直线  m=',num2str(exp(a(2))),'*e^{',num2str(a(1)),'*t}'];
text(8,28,string ,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $m=78.448e^{-0.10443t}$，图形为


拟合直线 m=78.448*e^-0.10443*t
0
10
20
30
40
50
60
0
5
10
15
20
25

# 习题 12.7 条件极值问题与 Lagrange 乘数法

1. 求下列函数的条件极值：

（1） $f(x,y)=xy$，约束条件为 $x+y=1$；

（2） $f(x,y,z)=x-2y+2z$，约束条件为 $x^2+y^2+z^2=1$；

（3） $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$，约束条件为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ Ax+By+Cz=0,\end{cases}$ 其中 $a>b>c>0$，$A^2+B^2+C^2=1$。

解 （1）令

$$L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x+y-1),$$

求偏导，得到

$$\begin{cases}L_x=y-\lambda=0,\\ L_y=x-\lambda=0,\\ L_\lambda=-(x+y-1)=0,\end{cases}$$

解得 $x=y=\dfrac{1}{2}$，即目标函数只有一个驻点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

由 $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，可知 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 是目标函数的条件极大值点，也是条件最大值点，条件最大值为 $f_{\max}=f(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$。

（2）令

$$L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z-\lambda(x^2+y^2+z^2-1),$$

求偏导，得到

$$\begin{cases}L_x=1-2\lambda x=0,\\ L_y=-2-2\lambda y=0,\\ L_z=2-2\lambda z=0,\\ L_\lambda=-(x^2+y^2+z^2-1)=0,\end{cases}$$

由前三式得到 $y=-z=-2x$，代入约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$，解得

$$(x,y,z)=\pm(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})。$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由于目标函数的驻点为 $\pm(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，对应的目标函数值为 $\pm3$，所以 $f_{\max}=f(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})=3$， $f_{\min}=f(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})=-3$。

（3）令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu(Ax+By+Cz)\text{，}$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{2x}{a^2}-2\lambda x-\mu A=0, \\ L_y=\dfrac{2y}{b^2}-2\lambda y-\mu B=0, \\ L_z=\dfrac{2z}{c^2}-2\lambda z-\mu C=0, \\ L_\lambda=-(x^2+y^2+z^2-1)=0, \\ L_\mu=-(Ax+By+Cz)=0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(xL_x+yL_y+zL_z\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda=0\text{。}$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于 $\lambda$ 的解中。

由

$$AL_x+BL_y+CL_z=2\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right)-\mu(A^2+B^2+C^2)=0\text{，}$$

得到

$$\mu=\frac{2}{A^2+B^2+C^2}\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right)=2\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right),$$

代入上面的方程组，得到

$$\begin{cases}\dfrac{L_x}{2}=\left(\dfrac{1-A^2}{a^2}-\lambda\right)x-\dfrac{AB}{b^2}y-\dfrac{AC}{c^2}z=0,\\ \dfrac{L_y}{2}=-\dfrac{AB}{a^2}x+\left(\dfrac{1-B^2}{b^2}-\lambda\right)y-\dfrac{BC}{c^2}z=0,\\ \dfrac{L_z}{2}=-\dfrac{AC}{a^2}x-\dfrac{BC}{b^2}y+\left(\dfrac{1-C^2}{c^2}-\lambda\right)z=0。\end{cases}$$

由约束条件可知驻点不在原点，即上面方程组有非零解，所以其系数行列式为零。经计算得到

$$-\lambda\left[\lambda^2+(\frac{A^2-1}{a^2}+\frac{B^2-1}{b^2}+\frac{C^2-1}{c^2})\lambda+(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2})\right]=0,$$

显然目标函数的最大值与最小值不为零，即$\lambda\neq 0$，所以$f$的最大值与最小值分别为方程

$$\lambda^2+(\frac{A^2-1}{a^2}+\frac{B^2-1}{b^2}+\frac{C^2-1}{c^2})\lambda+(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2})=0$$

的两个根。

2. 在周长为$2p$的一切三角形中，找出面积最大的三角形。

解 记三角形的边长为$a,b,c$，面积为$S$，则$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$。令

$$L(a,b,c,\lambda)=p(p-a)(p-b)(p-c)-\lambda(a+b+c-2p),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}L_a=-p(p-b)(p-c)+\lambda=0,\\ L_b=-p(p-a)(p-c)+\lambda=0,\\ L_c=-p(p-a)(p-b)+\lambda=0,\end{cases}$$

于是

$$p-a=p-b=p-c\text{，}$$

再根据约束条件得到

$$a=b=c=\frac{2}{3}p\text{，}$$

所以面积最大的三角形为正三角形，最大面积为$\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$。

3. 要做一个容积为 1 立方米的有盖铝圆桶，什么样的尺寸才能使用料最省？

解 假设圆桶的底面半径为 $r$，高为 $h$，则圆桶的容积为$\pi r^2h=1$，表面积为$S=2\pi rh+2\pi r^2$。令

$$L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda(\pi r^2h-1)\text{，}$$

求偏导，得到

$$\begin{cases}L_r=2\pi h+4\pi r-2\pi rh\lambda=0,\\ L_h=2\pi r-\pi r^2\lambda=0,\end{cases}$$

解得$h=2r$，再代入约束条件$\pi r^2h=1$，得到

$$r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\text{，}\quad h=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\text{。}$$

根据题意，目标函数必有最小值，所以可知当底面半径为$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$，高为$\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$时用料最省。

4. 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求原点到这个椭圆的最长距离与最短距离。

解 设原点到椭圆上一点的距离为$d(x,y,z)$，则$d^2=x^2+y^2+z^2$。令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x^2+y^2-z)-\mu(x+y+z-1)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x - \mu = 0, \\ L_y = 2y - 2\lambda y - \mu = 0, \\ L_z = 2z + \lambda - \mu = 0, \end{cases}$$

将前两式相减，得到$(\lambda-1)(x-y)=0$。

若$\lambda=1$，则有$\mu=0$，$z=-\dfrac{1}{2}$，显然不满足约束条件。

若$\lambda\neq 1$，则$x=y$，再联立约束条件$z=x^2+y^2$与$x+y+z=1$，可解出$x=y=\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3})$，$z=2x^2=2\mp\sqrt{3}$，从而有$d^2=9\mp 5\sqrt{3}$。

由于满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。于是得到

$$d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}，\quad d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}。$$

5. 求椭圆$x^2+3y^2=12$的内接等腰三角形，其底边平行于椭圆的长轴，而使面积最大。

解 设$(x,y), x\geq 0$为三角形底边上的顶点，则三角形面积为$S=x(2-y)$，令

$$L(x,y,\lambda)=x(2-y)-\lambda(x^2+3y^2-12)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = 2 - y - 2\lambda x, \\ L_y = -x - 6\lambda y, \end{cases}$$

消去$\lambda$，可得$6y-3y^2+x^2=0$，再联立约束条件$x^2+3y^2=12$，可得满足$x\geq 0$的驻点只有$(0,2)$和$(3,-1)$。

当$(x,y)=(0,2)$时$S=0$，当$(x,y)=(3,-1)$时$S=9$。由题意三角形面积一定存在最大值，于是得到

$$S_{\max}=9。$$

6. 求空间一点$(a,b,c)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离。

**解** 设$(x,y,z)$为平面上的一点，它与点$(a,b,c)$之间的距离为$d(x,y,z)$，则$d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$，令

$$L(x,y,z,\lambda)=d^2(x,y,z)-\lambda(Ax+By+Cz+D),$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=2(x-a)-A\lambda=0, \\ L_y=2(y-b)-B\lambda=0, \\ L_z=2(z-c)-C\lambda=0, \end{cases}$$

解得

$$x=a+\frac{1}{2}\lambda A,\quad y=b+\frac{1}{2}\lambda B,\quad z=c+\frac{1}{2}\lambda C,$$

代入约束条件$Ax+By+Cz+D=0$，得到

$$\frac{\lambda}{2}=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}。$$

于是

$$d^2=\left(\frac{\lambda A}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda B}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda C}{2}\right)^2==\frac{(Aa+Bb+Cc+D)^2}{A^2+B^2+C^2},$$

所以$(a,b,c)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为

$$d=\frac{|aA+bB+cC+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}。$$

7. 求平面$Ax+By+Cz=0$与柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$相交所成的椭圆的面积（$A,B,C$都不为零；$a,b$为正数）。

**解** 椭圆的中心在原点，原点到椭圆周上点$(x,y,z)$的距离$d$的最大值和最小值分别为椭圆的长半轴和短半轴。令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)-\mu(Ax+By+Cz),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = 2x - \dfrac{2\lambda x}{a^2} - \mu A = 0, \\ L_y = 2y - \dfrac{2\lambda y}{b^2} - \mu B = 0, \\ L_z = 2z - \mu C = 0, \\ L_\lambda = -(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1) = 0, \\ L_\mu = -(Ax + By + Cz) = 0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(xL_x + yL_y + zL_z\right) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda = 0\text{。}$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于$\lambda$的解中。以$\mu = \frac{2z}{C} = -2\frac{Ax+By}{C^2}$代入前两个方程，可得

$$\begin{cases} \dfrac{L_x}{2} = \left(1 - \dfrac{\lambda}{a^2} + \dfrac{A^2}{C^2}\right)x + \dfrac{AB}{C^2}y = 0, \\ \dfrac{L_y}{2} = \dfrac{AB}{C^2}x + \left(1 - \dfrac{\lambda}{b^2} + \dfrac{B^2}{C^2}\right)y = 0, \end{cases}$$

此方程组有非零解，所以系数行列式为 0。因此

$$\left(1 - \frac{\lambda}{a^2} + \frac{A^2}{C^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{b^2} + \frac{B^2}{C^2}\right) - \frac{A^2B^2}{C^4} = 0\text{，}$$

即

$$A^2\left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right) + B^2\left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right) + C^2\left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0\text{。}$$

这个二次方程的两个根$\lambda_1$与$\lambda_2$就是椭圆的长半轴和短半轴的平方，因此椭圆面积为$S = \pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，利用多项式根与系数的关系可得

$$\lambda_1\lambda_2 = (A^2 + B^2 + C^2)\frac{a^2b^2}{C^2}\text{，}$$

所以

$$S=\frac{\pi ab}{C}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\text{。}$$

8. 求$z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$在条件$x+y=a$下的最小值，其中$x\geq 0$，$y\geq 0$，$a$为常数。并证明不等式

$$\frac{x^4+y^4}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^4\text{。}$$

解　令

$$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}\left(x^4+y^4\right)-\lambda(x+y-a)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}L_x=2x^3-\lambda=0,\\ L_y=2y^3-\lambda=0,\\ L_\lambda=-(x+y-a)=0,\end{cases}$$

解得$x=y=\frac{a}{2}$。

由于连续函数$z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$在线段$\{(x,y)\,|\,x+y=a,x\geq 0,y\geq 0\}$的两个端点$(0,a),(a,0)$上的函数值有$f(0,a)=f(a,0)=\frac{1}{2}a^4>f(\frac{a}{2},\frac{a}{2})=\frac{1}{16}a^4$，所以$f_{\min}=f(\frac{a}{2},\frac{a}{2})=\frac{1}{16}a^4$。因此

$$\frac{x^4+y^4}{2}\geq\frac{1}{16}a^4=\left(\frac{a}{2}\right)^4=\left(\frac{x+y}{2}\right)^4\text{。}$$

9. 当$x>0,\ y>0,\ z>0$时，求函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$$

在球面$x^2+y^2+z^2=6R^2$上的最大值。并由此证明：当$a,b,c$为正实数时，成立不等式

$$ab^2c^3\leq 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6\text{。}$$

解　令

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{1}{x} - 2x\lambda = 0, \\ L_y = \dfrac{2}{y} - 2y\lambda = 0, \\ L_z = \dfrac{3}{z} - 2z\lambda = 0, \end{cases}$$

解得 $2\lambda = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{y^2} = \dfrac{3}{z^2}$，代入约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 6R^2$，可得

$$x^2 = R^2，\quad y^2 = 2R^2，\quad z^2 = 3R^2。$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点。于是得到

$$\ln x + 2\ln y + 3\ln z \le \ln[\sqrt{R^2}(2R^2)(3R^2)^{\frac{3}{2}}] = \ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)，$$

即

$$xy^2z^3 \le 6\sqrt{3}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6}\right)^3。$$

由前一式得到

$$f_{\max} = f(R, \sqrt{2}R, \sqrt{3}R) = \ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)。$$

在后一式中令 $a = x^2$， $b = y^2$ 和 $c = z^2$，得到

$$ab^2c^3 \le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6。$$

10．（1） 求函数 $f(x,y,z) = x^a y^b z^c \quad (x>0, y>0, z>0)$ 在约束条件 $x^k + y^k + z^k = 1$ 下的极大值，其中 $k,a,b,c$ 均为正常数；

（2）利用（1）的结果证明：对于任何正数 $u,v,w$，成立不等式

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c \le \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}。$$

解 （1）令

$$L(x,y,z,\lambda) = a\ln x + b\ln y + c\ln z - \lambda(x^k + y^k + z^k - 1)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{a}{x} - k\lambda x^{k-1} = 0, \\ L_y = \dfrac{b}{y} - k\lambda y^{k-1} = 0, \\ L_z = \dfrac{c}{z} - k\lambda z^{k-1} = 0, \end{cases}$$

解得 $k\lambda = \dfrac{a}{x^k} = \dfrac{b}{y^k} = \dfrac{c}{z^k}$，代入约束条件 $x^k + y^k + z^k = 1$，得到 $\dfrac{a+b+c}{k\lambda} = 1$，所以

$$x^k = \frac{a}{a+b+c}，\quad y^k = \frac{b}{a+b+c}，\quad z^k = \frac{c}{a+b+c}。$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点。于是

$$a\ln x + b\ln y + c\ln z = \ln(x^a y^b z^c) \le \ln\left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}}，$$

即得到

$$x^a y^b z^c \le \left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}}。$$

（2）令 $k=1$，$x = \dfrac{u}{u+v+w}$，$y = \dfrac{v}{u+v+w}$，$z = \dfrac{w}{u+v+w}$，则 $x+y+z=1$，且

$$x^a y^b z^c = \left(\frac{u}{u+v+w}\right)^a \left(\frac{v}{u+v+w}\right)^b \left(\frac{w}{u+v+w}\right)^c = \frac{u^a v^b w^c}{(u+v+w)^{a+b+c}}。$$

利用（1）的结果，有

$$x^a y^b z^c \le \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}。$$

整理后得到

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \le \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}。$$

11．求$a,b$之值，使得椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$包含圆$(x-1)^2+y^2=1$，且面积最小。

解　为了使椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$既包含圆$(x-1)^2+y^2=1$，又面积最小，可以要求圆心$(1,0)$到椭圆周上的点的最短距离为$1$。为此先考虑目标函数$g(x,y)=(x-1)^2+y^2$在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$条件下的极小值问题，并设条件极小值为$g_{\min}=1$，由此导出$a,b$之间的关系。构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y^2-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}\frac{1}{2}L_x=(x-1)-\frac{\lambda x}{a^2}=0,\\ \frac{1}{2}L_y=y-\frac{\lambda y}{b^2}=y(1-\frac{\lambda}{b^2})=0,\\ L_\lambda=-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0,\end{cases}$$

并由此可得

$$g_{min}=(x-1)^2+y^2=\lambda\left(1-\frac{x}{a^2}\right)=1。$$

若$y=0$，则$x=a$。由$g_{min}=(x-1)^2+y^2=1$，可得$a=2$。在方程组$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$中消去$y$，得到$(1-\frac{b^2}{4})x^2-2x+b^2=0$，容易知道当$b<\sqrt{2}$时方程除了解$x_1=2$外另有一解$x_2\in(0,2)$，这说明椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$不完全包含圆$(x-1)^2+y^2=1$，不满足条件。所以$b\ge\sqrt{2}$，这时椭圆面积$S\ge 2\sqrt{2}\pi$。

若$\lambda = b^2$，则$x = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2}$，代入$g_{min} = \lambda\left(1 - \dfrac{x}{a^2}\right) = 1$，得到$a, b$必须满足的关系式

$$a^2b^2 = a^2 + b^4。$$

现求目标函数$f(a,b) = \pi ab$在$a^2b^2 = a^2 + b^4$条件下的极小值。令

$$l(a,b,\lambda) = \pi ab - \lambda(a^2b^2 - a^2 - b^4)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} l_a = \pi b - 2\lambda a(b^2 - 1) = 0, \\ l_b = \pi a - 2\lambda b(a^2 - 2b^2) = 0, \end{cases}$$

消去$\lambda$，得到$a = \sqrt{2}b^2$，再代入关于$a, b$的约束条件$a^2b^2 = a^2 + b^4$，解得

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{2}，\quad b = \frac{\sqrt{6}}{2}，$$

这时椭圆面积$S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$。由于$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi < 2\sqrt{2}\pi$，所以当$a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$b = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$时，椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$包含圆$(x-1)^2 + y^2 = 1$，且面积最小。

12．设三角形$ABC$的三个顶点分别在三条光滑曲线$f(x,y) = 0$，$g(x,y) = 0$及$h(x,y) = 0$上。证明：若三角形$ABC$的面积取极大值，则各曲线分别在三个顶点处的法线必通过三角形$ABC$的垂心。

**证** 不妨固定一边$BC$于$x$轴上，$A$点在曲线$f(x,y) = 0$上移动，设$y = y(x)$是$f(x,y) = 0$所确定的隐函数，则$y(x)$就是三角形的高，当三角形$ABC$的面积取极大值时，$\dfrac{dy(x)}{dx} = 0$，即曲线$f(x,y) = 0$在$A$点的切线与对边$BC$平行，所以在$A$点的法线与$BC$边垂直。由于这是图形的几何性质，不依赖于坐标系，所以曲线$f(x,y) = 0, g(x,y) = 0$与$h(x,y) = 0$在三个顶点处的切线分别平行于三角形的对边，从而在三个顶点处的法

线分别垂直于三角形的对边。

13．设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为$n$个已知正数。求$n$元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$$

在约束条件

$$\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2\le 1$$

下的最大值与最小值。

解　由于$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1\}$没有驻点，所以只需要求$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在约束条件$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$下的最大值与最小值。令

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\lambda\ (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$L_{x_k}=a_k-2\lambda x_k=0,\quad k=1,\cdots,n\text{，}$$

所以

$$x_k=\frac{a_k}{2\lambda}=0,\quad k=1,\cdots,n\text{，}$$

代入约束条件$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，可得$2\lambda=\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}$，于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}}=\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\text{，}$$

从而

$$f_{\max}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\text{，}\quad f_{\min}=-\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\text{。}$$

14．求二次型 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$ 在 $n$ 维单位球面 $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 = 1\right\}$ 上的最大值与最小值。

解 令

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j-\lambda\ (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}\frac{1}{2}L_{x_k}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i-\lambda x_k=0, \quad k=1,\cdots,n, \\ L_\lambda=-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)=0,\end{cases}\text{，}$$

由

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k L_{x_k}=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k-\lambda\sum_{k=1}^{n} x_k^2=0\text{，}$$

可知

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=\lambda\text{，}$$

即目标函数的最大值和最小值包含在上面的方程组关于 $\lambda$ 的解中。

记 $\mathbf{A}=(a_{ij})$，由于方程组 $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i-\lambda x_k=0, \quad (k=1,\cdots,n)$ 有非零解，所以系数行列式 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$，即 $\lambda$ 是矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 的特征值。由于 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 是实对称阵，所以特征值都是实数，将它们按照大小排序为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，则得到

$$f_{\max}=\lambda_n\text{，}\quad f_{\min}=\lambda_1\text{。}$$

15．设生产某种产品必须投入两种要素，$x_1$ 和 $x_2$ 分别为两要素的投入量，$Q$ 为产出量。若生产函数为 $Q=2{x_1}^{\alpha}{x_2}^{\beta}$，其中 $\alpha,\beta$ 为正的常数，且

$\alpha+\beta=1$。假定两种要素的价格分别为 $p_1$ 和 $p_2$，试问：当产出量为 12 时，两种要素各投入多少可以使得投入总费用最小。

**解**　目标函数为 $f(x_1,x_2)=p_1x_1+p_2x_2$，约束条件为 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6$。令

$$L(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2-\lambda(2x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}-12),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_{x_1}=p_1-2\alpha\lambda x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}=0, \\ L_{x_2}=p_2-2(1-\alpha)\lambda x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}=0, \end{cases}$$

消去 $\lambda$，得到 $x_2=\dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}x_1$，代入约束条件 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6$，可解得

$$x_1=\frac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}},\quad x_2=\frac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}。$$

由于 $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to\infty}f(x_1,x_2)=+\infty$，所以目标函数的唯一驻点必是最小值点，即当 $x_1=\dfrac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}}$，$x_2=\dfrac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}$ 时投入总费用最小。

# 第十三章　重积分

## 习　题 13.1　有界区域上的重积分

1. 设一平面薄板（不计其厚度），它在 $xy$ 平面上的表示是由光滑的简单闭曲线围成的闭区域 **D**。如果该薄板分布有面密度为 $\mu(x,y)$ 的电荷，且 $\mu(x,y)$ 在 **D** 上连续，试用二重积分表示该薄板上的全部电荷。

解　设电荷总量为 $Q$，则

$$Q=\iint_D \mu(x,y)d\sigma \text{。}$$

2. 设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $\mathbf{D}=[0,\pi]\times[0,1]$ 上有界，而且除了曲线段 $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ 外，$f(x,y)$ 在 **D** 上其它点连续。证明 $f$ 在 **D** 上可积。

证　设 $|f(x,y)|\le M,(x,y)\in\mathbf{D}$，将 **D** 用平行于两坐标轴的直线分成 $n$ 个小区域 $\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\mathrm{diam}\Delta D_i\}$，不妨设 $\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 将曲线段 $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ 包含在内，于是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta D_i$ 上连续，因此 $f(x,y)$ 在 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta D_i$ 上可积，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 $\lambda<\delta_1$ 时，

$$\sum_{i=k+1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

而当 $\lambda<\dfrac{\varepsilon}{4kM}$ 时，

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta\sigma_i<2M\sum_{i=1}^{k}\Delta\sigma_i<2kM\lambda<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

取 $\delta=\min\left(\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{4kM}\right)$，当 $\lambda<\delta$ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\text{，}$$

所以 $f$ 在 **D** 上可积。

3. 按定义计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 $\mathbf{D}=[0,1]\times[0,1]$。

解　将 **D** 分成 $n^2$ 个小正方形

$$\Delta D_{ij}=\left\{(x,y)\left|\frac{i-1}{n}\le x\le\frac{i}{n},\frac{j-1}{n}\le y\le\frac{j}{n}\right.\right\}(i,j=1,2,\cdots n)\text{，}$$

取 $\xi_i=\dfrac{i}{n},\eta_j=\dfrac{j}{n}$，则

$$\iint_D xydxdy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\eta_j\Delta\sigma_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j=1}^{n}ij$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{1}{4}\text{。}$$

4．设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\mathbf{D}=[a,b]\times[c,d]$。定义二元函数

$$F(x,y)=f(x)\text{，}\ (x,y)\in\mathbf{D}\text{。}$$

证明 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

证 将 $[a,b]$、$[c,d]$ 分别作划分：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

和

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{m-1}<y_m=d\text{，}$$

则 $\mathbf{D}$ 分成了 $nm$ 个小矩形 $\Delta D_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$。

记 $\omega_i$ 是 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，$\omega_{ij}(F)$ 是 $F$ 在 $\Delta D_{ij}$ 上的振幅，则

$$\omega_{ij}(F)=\omega_i\text{，}$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\Delta y_j=(d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\text{，}$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，可知 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to 0\ (\lambda\to 0)$，所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij}=\lim_{\lambda\to 0}\left\{(d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\right\}=0\text{，}$$

即 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

5．设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的零边界闭区域，二元函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。证明

$$H(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$$

和

$$h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$$

也在 $\mathbf{D}$ 上可积。

证 首先我们有

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\Big(f(x,y)+g(x,y)+\big|f(x,y)-g(x,y)\big|\Big)\text{，}$$

$$h(x,y)=\frac{1}{2}\Big(f(x,y)+g(x,y)-\big|f(x,y)-g(x,y)\big|\Big)\text{。}$$

设$\varphi(x,y)=|f(x,y)-g(x,y)|$，将$\mathbf{D}$划分成$n$个小区域$\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，利用不等式$\big||a-b|-|c-d|\big|\le|(a-b)-(c-d)|\le|a-c|+|b-d|$，可得

$$\omega_i(\varphi)\le\omega_i(f)+\omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\omega_i(H)\le\omega_i(f)+\omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$0\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(H)\Delta\sigma_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta\sigma_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta\sigma_i,$$

由$f,g$在$\mathbf{D}$上可积，可知

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(H)\Delta\sigma_i=0,$$

即$H(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$在$\mathbf{D}$上可积。

类似地可得

$$\omega_i(h)\le\omega_i(f)+\omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

从而得到$h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$在$\mathbf{D}$上也可积。

# 习　题　13.2　重积分的性质与计算

1．证明重积分的性质 8。

证　不妨设 $g(x)\ge 0$，$M$、$m$ 分别是 $f(x)$ 在区域 $\Omega$ 上的上确界、下确界，由 $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$、性质 1 和性质 3，可得

$$m\int_\Omega g(x)dV \le \int_\Omega f(x)g(x)dV \le M\int_\Omega g(x)dV,$$

当 $\int_\Omega g(x)dV=0$，积分中值定理显然成立。当 $\int_\Omega g(x)dV\ne 0$，则

$$m\le \frac{\int_\Omega f(x)g(x)dV}{\int_\Omega g(x)dV}\le M,$$

所以存在 $\mu\in[m,M]$，使得

$$\frac{\int_\Omega f(x)g(x)dV}{\int_\Omega g(x)dV}=\mu,$$

即

$$\int_\Omega f(x)g(x)dV=\mu\int_\Omega g(x)dV。$$

如果 $f$ 在有界闭区域 $\Omega$ 上连续，由介值定理，存在 $\xi\in\Omega$，使得 $f(\xi)=\mu$，所以

$$\int_\Omega f(x)g(x)dV=f(\xi)\int_\Omega g(x)dV。$$

2．根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^2dxdy$ 与 $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^3dxdy$，其中 **D** 为 $x$ 轴，$y$ 轴与直线 $x+y=1$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\ln(x+y)dxdy$ 与 $\iint\limits_{\mathbf{D}}[\ln(x+y)]^2dxdy$，其中 **D** 为闭矩形 $[3,5]\times[0,1]$。

解（1）因为在 **D** 上成立 $0<x+y<1$，所以 $(x+y)^2>(x+y)^3$，于是

$$\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^2dxdy>\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^3dxdy。$$

（2）因为在 **D** 上成立 $x+y\ge 3$，所以 $\ln(x+y)<[\ln(x+y)]^2$，于是

$$\iint\limits_{\mathbf{D}}\ln(x+y)dxdy<\iint\limits_{\mathbf{D}}[\ln(x+y)]^2dxdy。$$

3．用重积分的性质估计下列重积分的值：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}xy(x+y)dxdy$，其中 **D** 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，其中 **D** 为区域 $\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdxdz}{1+x^2+y^2+z^2}$，其中 $\Omega$ 为单位球$\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$。

解（1）因为在 **D** 上成立 $0\le xy(x+y)\le 2$，所以

$$0\le\iint\limits_{\mathbf{D}}xy(x+y)dxdy\le 2。$$

（2）因为在 **D** 上成立 $\dfrac{1}{102}\le\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\dfrac{1}{100}$，所以

$$\frac{100}{51}\le\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le 2。$$

（3）因为在 $\Omega$ 上成立 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\le 1$，所以

$$\frac{2}{3}\pi\le\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdxdz}{1+x^2+y^2+z^2}\le\frac{4}{3}\pi。$$

4．计算下列重积分：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x^3+3x^2y+y^3)dxdy$，其中 **D** 为闭矩形$[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}dxdy$，其中 **D** 为闭矩形$[a,b]\times[c,d]$；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$，其中 $\Omega$ 为长方体$[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$。

解（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}}(x^3+3x^2y+y^3)dxdy=\int_0^1dy\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)dx$

$=\int_0^1(\frac{1}{4}+y+y^3)dy=1$。

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}}xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}dxdy=\int_a^b xe^{x^2}dx\int_c^d ye^{y^2}dy=\dfrac{1}{4}\left(e^{b^2}-e^{a^2}\right)\left(e^{d^2}-e^{c^2}\right)$。

（3）$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$

$=\int_1^2dx\int_1^2dy\int_1^2\dfrac{dz}{(x+y+z)^3}=-\dfrac{1}{2}\int_1^2dx\int_1^2\left(\dfrac{1}{(x+y+2)^2}-\dfrac{1}{(x+y+1)^2}\right)dy$

$=\dfrac{1}{2}\int_1^2\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{x+2}\right)dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{128}{125}$。

5．在下列积分中改变累次积分的次序：

(1) $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy \qquad (a<b)$；

(2) $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy \qquad (a>0)$；

(3) $\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$；

(4) $\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$；

(5) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$（改成先 $y$ 方向，再 $x$ 方向和 $z$ 方向的次

序积分）；

(6) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$ （改成先 $x$ 方向，再 $y$ 方向和 $z$ 方向的次序积分）。

解（1） $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$。

（2） $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy$

$$=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx。$$

（3） $\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$。

（4） $\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x}f(x,y)dy$。

（5） $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dz\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy-\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_0^{z-x}f(x,y,z)dy。$$

注：也可写成 $\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)dy$。

（6）

$$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx。$$

6． 计算下列重积分：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}xy^2dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}\quad(a>0)$，其中 $\mathbf{D}$ 为圆心在 $(a,a)$，半径为 $a$ 并且和坐标轴相切的圆周上较短的一段弧和坐标轴所围的区域；

(3) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\mathrm{e}^{x+y}dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为区域 $\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$；

(4) $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x^2+y^2)dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为直线 $y=x,y=x+a,y=a$ 和 $y=3a\ (a>0)$ 所围的区域；

(5) $\iint\limits_{\mathbf{D}}ydxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$ 与 $x$ 轴所围的区域；

(6) $\iint\limits_{\mathbf{D}}y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为直线 $y=x,\ y=-1$ 和 $x=1$ 所围的区域；

(7) $\iint\limits_{\mathbf{D}}x^2ydxdy$，其中 $\mathbf{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 2x,1\le x\le 2,0\le y\le x\}$；

(8) $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz$，其中 **Ω** 为曲面 $z=xy$，平面 $y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围的区域；

(9) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 **Ω** 为平面 $x=0, y=0, z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体；

(10) $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中 **Ω** 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围的区域；

(11) $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$，其中 **Ω** 为球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$ $(R>0)$ 的公共部分；

（12） $\iiint\limits_{\Omega} x^2dxdydz$，其中 **Ω** 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$。

解（1） $\iint\limits_{D} xy^2dxdy = \int_{-p}^{p} y^2dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} xdx = \frac{1}{8}\int_{-p}^{p} y^2(p^2-\frac{y^4}{p^2})dy = \frac{1}{21}p^5$。

（2） $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dy = \int_0^a\left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}}-\sqrt{x}\right)dx$

$= (2\sqrt{2}-\frac{8}{3})a^{\frac{3}{2}}$。

（3） $\iint\limits_{D} e^{x+y}\,dxdy = \int_{-1}^{0} e^x dx\int_{-1-x}^{1+x} e^y dy + \int_0^1 e^x dx\int_{x-1}^{1-x} e^y dy = e-\frac{1}{e}$。

（4） $\iint\limits_{D} (x^2+y^2)dxdy = \int_a^{3a} dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx$

$= \int_a^{3a}(2ay^2-a^2y+\frac{1}{3}a^3)dy = 14a^4$。

（5） $\iint\limits_{D} ydxdy = \int_0^{2\pi a} dx\int_0^{y(x)} ydy = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt = \frac{5\pi}{2}a^3$。

（6） $\iint\limits_{D} y\left[1+x e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]dxdy = \int_{-1}^{1} ydy\int_y^1\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]dx$

$= \int_{-1}^{1}\left(y-y^2+\frac{1}{2}y(e^{\frac{y^2+1}{2}}-e^{y^2}\right)dy = -\int_{-1}^{1} y^2dy = -\frac{2}{3}$。

（7） $\iint\limits_{D} x^2ydxdy = \int_1^2 x^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} ydy = \int_1^2 x^2(x^2-x)dx = \frac{49}{20}$。

（8） $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz = \int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz = \frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy = \frac{1}{364}$。

(9) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\dfrac{dz}{(1+x+y+z)^3}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}-\frac{1-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}\text{。}$$

(10) $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int_0^h zdz\iint\limits_{\Omega_z}dxdy=\pi\int_0^h z^2dz=\dfrac{1}{3}\pi h^3$。

(11) $\iiint_{\Omega} z^2dxdydz=\int_0^R z^2dz\iint_{\Omega_z}dxdy$

$$=\pi\int_0^{\frac{R}{2}}z^2(2Rz-z^2)dz+\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2(R^2-z^2)dz=\frac{59}{480}\pi R^5\text{。}$$

(12) $\iiint_{\Omega} x^2dxdydz=\int_{-a}^a x^2dx\iint_{\Omega_x}dydz$

$$=\pi bc\int_{-a}^a x^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc\text{。}$$

7．设平面薄片所占的区域是由直线 $x+y=2, y=x$ 和 $x$ 轴所围成，它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求这个薄片的质量。

解　设薄片的质量为 $m$，则

$$m=\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_0^1(\frac{8}{3}-4y+4y^2-\frac{8}{3}y^3)dy=\frac{4}{3}\text{。}$$

8. 求抛物线 $y^2=2px+p^2$ 与 $y^2=-2qx+q^2\quad(p,q>0)$ 所围图形的面积。

解 联立两个抛物线方程，解得 $x=\dfrac{q-p}{2}, y=\pm\sqrt{pq}$，于是两抛物线所围的面积为

$$S=\int_{-\sqrt{pq}}^{\sqrt{pq}}dy\int_{\frac{y^2}{2p}-\frac{p}{2}}^{\frac{q}{2}-\frac{y^2}{2q}}dx=\int_0^{\sqrt{pa}}[(p+q)-\frac{p+q}{pq}y^2]dy=\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}\text{。}$$

9. 求四张平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 和 $2x+3y+z=6$ 截的的立体的体积。

解 设 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，利用对称性，有

$$\iint\limits_D xdxdy=\iint\limits_D ydxdy\text{，}$$

于是

$$V=\iint\limits_D(6-2x-3y)dxdy=6-5\int_0^1 dx\int_0^1 ydy=\frac{7}{2}\text{。}$$

10. 求柱面 $y^2+z^2=1$ 与三张平面 $x=0, y=x, z=0$ 所围的在第一卦限的立体的体积。

解 设$D$是所围空间区域在$xy$平面的投影，则

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y,0\le y\le 1\}，$$

于是

$$V=\iint_D\sqrt{1-y^2}dxdy=\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy=\frac{1}{3}。$$

11. 求旋转抛物面$z=x^2+y^2$，三个坐标平面及平面$x+y=1$所围有界区域的体积。

解 设$D$是所围空间区域在$xy$平面的投影，则

$$D=\{(x,y)\mid x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}，$$

于是

$$V=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=2\iint_D x^2dxdy=2\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x}dy=\frac{1}{6}。$$

12．设$f(x)$在$\mathbf{R}$上连续，$a,b$为常数。证明

(1) $\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(y)(b-y)dy$；

(2) $\int_0^a dy\int_0^y e^{(a-x)}f(x)dx=\int_0^a(a-x)e^{(a-x)}f(x)dx$ （$a>0$）。

证（1）交换积分次序，则得到

$$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(y)dy\int_y^b dx=\int_a^b f(y)(b-y)dy。$$

（2）交换积分次序，则得到

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{(a-x)}f(x)dx=\int_0^a e^{(a-x)}f(x)dx\int_x^a dy=\int_0^a(a-x)e^{(a-x)}f(x)dx。$$

13．设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}e^y f(x)dx=\int_0^1(e^x-e^{x^2})f(x)dx。$$

证 交换积分次序，则得到

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}e^y f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx\int_{x^2}^x e^y dy=\int_0^1(e^x-e^{x^2})f(x)dx。$$

14. 设$\mathbf{D}=[0,1]\times[0,1]$，证明

$$1\le\iint_{\mathbf{D}}\left[\sin(x^2)+\cos(y^2)\right]dxdy\le\sqrt{2}。$$

证

$$\iint_D[\sin(x^2)+\cos(y^2)]dxdy=\int_0^1\sin(x^2)dx\int_0^1 dy+\int_0^1\cos(y^2)dy\int_0^1 dx$$

$$=\int_0^1\sin(x^2)dx+\int_0^1\cos(y^2)dy=\int_0^1[\sin(x^2)+\cos(x^2)]dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\sin(x^2+\frac{\pi}{4})dx。$$

当$x\in[0,1]$时，成立

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le 1，$$

所以

$$1 \le \iint_{\mathbf{D}} \left[\sin(x^2) + \cos(y^2)\right] dxdy \le \sqrt{2}\text{。}$$

15．设 $\mathbf{D} = [0,1] \times [0,1]$，利用不等式 $1 - \frac{t^2}{2} \le \cos t \le 1$ （$|t| \le \pi/2$）证明

$$\frac{49}{50} \le \iint_{\mathbf{D}} \cos(xy)^2 dxdy \le 1\text{。}$$

证 由

$$1 - \frac{(xy)^4}{2} \le \cos(xy)^2 \le 1\text{，}$$

易知

$$\iint_{\mathbf{D}} \cos(xy)^2 dxdy \le 1\text{，}$$

另一方面，由于

$$\iint_{\mathbf{D}} [1 - \frac{(xy)^4}{2}] dxdy = 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx \int_0^1 y^4 dy = \frac{49}{50}\text{，}$$

所以

$$\frac{49}{50} \le \iint_{\mathbf{D}} \cos(xy)^2 dxdy\text{。}$$

16．设 $\mathbf{D}$ 是由 $xy$ 平面上的分段光滑简单闭曲线所围成的区域，$\mathbf{D}$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的投影长度分别为 $l_x$ 和 $l_y$，$(\alpha,\beta)$ 是 $\mathbf{D}$ 内任意一点。证明

(1) $\left|\iint_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy\right| \le l_x l_y m\mathbf{D}$ ；

(2) $\left|\iint_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy\right| \le \frac{l_x^2 l_y^2}{4}$。

证（1） $\left|\iint_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy\right| \le \iint_{\mathbf{D}} |x-\alpha||y-\beta| dxdy$

$$\le l_x l_y \iint_{\mathbf{D}} dxdy = l_x l_y m\mathbf{D}\text{。}$$

（2）设 $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{D}' = [a,b] \times [c,d]$，且 $b-a = l_x,\ d-c = l_y$。则

$$\left|\iint_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy\right| \le \iint_{\mathbf{D}} |(x-\alpha)(y-\beta)| dxdy$$

$$\le \iint_{\mathbf{D}'} |x-\alpha||y-\beta| dxdy = \int_a^b |x-\alpha| dx \int_c^d |y-\beta| dy\text{，}$$

由于 $\alpha \in [a,b]$，于是

$$\int_a^b |x-\alpha| dx = -\int_a^\alpha (x-\alpha) dx + \int_\alpha^b (x-\alpha) dx = \frac{1}{2}[(\alpha-a)^2 + (b-\alpha)^2]\text{，}$$

$$= \frac{1}{2}[(b-\alpha)+(\alpha-a)]^2 - (b-\alpha)(\alpha-a) \le \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2} l_x^2\text{，}$$

同理可得

$$\int_c^d |y-\beta| dy \le \frac{1}{2} l_y^2 ，$$

所以

$$\left| \iint_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy \right| \le \frac{l_x{}^2 l_y{}^2}{4} 。$$

17．利用重积分的性质和计算方法证明：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b [f(x)]^2 dx 。$$

**证** 由于

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 = \iint_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)dxdy \le \frac{1}{2} \iint_{[a,b]\times[a,b]} \left(f^2(x)+f^2(y)\right)dxdy ，$$

由对称性，

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \left(f^2(x)+f^2(y)\right)dxdy = 2\iint_{[a,b]\times[a,b]} f^2(x)dxdy$$

$$= 2\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b dy = 2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx ，$$

所以

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b [f(x)]^2 dx 。$$

18．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \mathrm{e}^{f(x)-f(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2 。$$

**证明一** 将区间 $[a,b]$ $n$ 等分，并取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} e^{f(x)-f(y)} dxdy = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} \cdot \sum_{i=1}^n e^{-f(\xi_i)} \right\} ，$$

再利用不等式：当 $x_i > 0$ （$i = 1,2,\cdots,n$）时成立

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2 ，$$

（注：上述不等式可由算术平均不小于几何平均得到）

就有

$$\frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} \cdot \sum_{i=1}^n e^{-f(\xi_i)} \ge (b-a)^2 ，$$

所以

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \mathrm{e}^{f(x)-f(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2 。$$

**证明二** 设 $\mathbf{D} = [a,b]\times[a,b]$，由对称性，有

$$\iint_{\mathbf{D}} e^{f(x)-f(y)} dxdy = \iint_{\mathbf{D}} e^{f(y)-f(x)} dxdy ，$$

于是

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} e^{f(x)-f(y)}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbf{D}}[e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}]dxdy\ge\iint\limits_{\mathbf{D}}dxdy=(b-a)^2。$$

19．设 $\mathbf{\Omega}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,0\le x_i\le 1,\ i=1,2,\cdots,n\}$，计算下列$n$重积分：

(1) $\int\limits_{\Omega}({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$ ；

(2) $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$ 。

解（1） $\int\limits_{\Omega}({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=n\int\limits_{\Omega}x_1^2dx_1dx_2\cdots dx_n=n\int_0^1 x_1^2dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_n=\frac{n}{3}。$$

（2） $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}x_ix_jdx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}x_i^2dx_1dx_2\cdots dx_n+2\sum_{1\le i<j\le n}\int\limits_{\Omega}x_ix_jdx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{n}{3}+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{4}=\frac{n}{3}+\frac{1}{4}n(n-1)=\frac{n(3n+1)}{12}。$$

# 习　题　13.3　重积分的变量代换

1. 利用极坐标计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由圆周$x^2+y^2=R^2\ (R>0)$所围区域；

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{x}dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由圆周$x^2+y^2=x$所围区域；

（3）$\iint\limits_{\mathbf{D}} (x+y)dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由圆周$x^2+y^2=x+y$所围区域；

（4）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限上的区域。

解（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-R^2})$。

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{x}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r}rdr=\dfrac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\dfrac{8}{15}$。

（3）$\iint\limits_{\mathbf{D}} (x+y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2dr$

$=\dfrac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^4d\theta=\dfrac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^4(\theta+\dfrac{\pi}{4})d\theta=\dfrac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4 tdt=\dfrac{\pi}{2}$。

注：本题也可通过作变换

$$x=\frac{1}{2}+r\cos\theta,\ y=\frac{1}{2}+r\sin\theta\ (0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}})$$

来求解。

（4）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\dfrac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}dt$

$=\dfrac{\pi}{4}\int_0^1\dfrac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}$。

2. 求下列图形的面积：

（1）$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$　（$\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$）所围的区域；

（2）由抛物线$y^2=mx,\ y^2=nx\ (0<m<n)$，直线$y=\alpha x,\ y=\beta x\ (0<\alpha<\beta)$所围的区域；

（3）三叶玫瑰线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\ (a>0)$所围的图形；

（4）曲线$\left(\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}\right)^4=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\ (h,k>0;\ a,b>0)$所围图形在$x>0,\ y>0$的部分。

解（1）作变换 $u=a_1x+b_1y+c_1, v=a_2x+b_2y+c_2$，则 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=a_1b_2-a_2b_1$，于是面积

$$S=\iint_{D'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\iint_{D'}dudv=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}。$$

（2）作变换 $u=\frac{y^2}{x}, v=\frac{y}{x}$，则 $x=\frac{u}{v^2}, y=\frac{u}{v}$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{u}{v^4}$，于是面积

$$S=\iint_{D'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\int_m^n udu\int_\alpha^\beta\frac{dv}{v^4}=\frac{1}{6}(n^2-m^2)(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3})。$$

（3）令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则曲线方程可化为极坐标形式 $r=a\cos3\theta$，于是面积

$$S=3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^{a\cos3\theta}rdr=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\frac{\pi}{4}a^2。$$

（4）作变换 $\begin{cases}x=hr\cos^2\theta\\ y=kr\sin^2\theta\end{cases}$，则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=hkr\sin2\theta$，而曲线方程化为

$$r^2=\frac{h^2}{a^2}\cos^4\theta+\frac{k^2}{b^2}\sin^4\theta，$$

于是面积

$$\begin{aligned}S&=hk\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{h^2}{a^2}\cos^4\theta+\frac{k^2}{b^2}\sin^4\theta}}rdr\\&=hk\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{h^2}{a^2}\sin\theta\cos^5\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2}{b^2}\sin^5\theta\cos\theta d\theta\right)\\&=\frac{hk(a^2k^2+b^2h^2)}{6a^2b^2}。\end{aligned}$$

3. 求极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)dxdy，$$

其中 $f(x,y)$ 在原点附近连续。

解 由积分中值定理，

$$\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\pi\rho^2，$$

其中 $\xi^2+\eta^2\le\rho^2$。

因为 $f$ 连续，且当 $\rho\to0$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，所以

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)dxdy=f(0,0)。$$

4. 选取适当的坐标变换计算下列二重积分：

（1）$\iint_{\mathbf{D}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dxdy$，其中**D**是由坐标轴及抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 所围

的区域；

（2）$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$，其中D是由 i）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围区域；

ii）圆$x^2+y^2=R^2$所围的区域；

（3）$\iint\limits_{D} ydxdy$，其中D是由直线$x=-2, y=0$，$y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围的区域；

（4）$\iint\limits_{D} e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$，其中D是由直线$x+y=2, x=0$及$y=0$所围的区域；

（5）$\iint\limits_{D}\frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}dxdy$，其中闭区域$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$；

（6）$\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$，其中闭区域D是由曲线$y=\sqrt{a^2-x^2}-a$（$a>0$）和直线$y=-x$所围成。

解（1）作变换$\begin{cases}u=\sqrt{x}\\ v=\sqrt{y}\end{cases}$，则$\begin{cases}x=u^2\\ y=v^2\end{cases}$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4uv$，于是

$$\iint\limits_{D}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dxdy=\iint\limits_{D'}(u+v)4uvdudv=8\int_0^1 vdv\int_0^{1-v}u^2du$$

$$=8\int_0^1[(1-v)^3-(1-v)^4]dv=\frac{2}{15}。$$

注：本题也可通过作变换 $x=r\cos^4\theta, y=r\sin^4\theta$来求解。

（2）i）作广义极坐标变换$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$，则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$，于是

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}ab\ ；$$

ii）利用极坐标变换，得到

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{\pi(a^2+b^2)R^4}{4a^2b^2}。$$

（3）$$\iint\limits_{D} ydxdy=\iint\limits_{\substack{-2\le x\le 0\\ 0\le y\le 2}} ydxdy-\iint\limits_{\sqrt{2y-y^2}\ge -x} ydxdy$$

$$=\int_{-2}^0 dx\int_0^2 ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2dr=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=4-\frac{\pi}{2}。$$

（4）作变换$u=x+y, v=\frac{x-y}{x+y}$，则$x=\frac{1}{2}u(1+v), y=\frac{1}{2}u(1-v)$，直接计算得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{u}{2}。$$

由 $x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 2$，可得 $0 \le u \le 2, -1 \le v \le 1$，于是

$$\iint\limits_{D} e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 udu\int_{-1}^1 e^v dv = e - \frac{1}{e}。$$

（5）作变换 $u = x+y, v = x-y$，则 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -2, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$，于是

$$\iint\limits_{D} \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2} dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^2 du\int_{-1}^1 \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{6}。$$

（6）利用极坐标，得到

$$\iint\limits_{D} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a\sin\theta} \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr，$$

由

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = -\int rd\sqrt{4a^2-r^2} = -r\sqrt{4a^2-r^2} + \int \sqrt{4a^2-r^2} dr$$

以及

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = \int \frac{4a^2-(4a^2-r^2)}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = 4a^2 \arcsin\frac{r}{2r} - \int \sqrt{4a^2-r^2} dr，$$

可得

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = 2a^2 \arcsin\frac{r}{2a} - \frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2} + C，$$

所以

$$\iint\limits_{D} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dxdy = 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (\sin\theta\cos\theta - \theta)d\theta = \frac{\pi^2-8}{16}a^2。$$

5. 选取适当的坐标变换计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$，其中 $\Omega$ 为球 $\{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le 1\}$；

（2）$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} dxdydz$，其中 $\Omega$ 为椭球

$\left\{(x,y,z) \middle| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$；

（3）$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2} dxdydz$，其中 $\Omega$ 为柱面 $y = \sqrt{2x-x^2}$ 及平面

$z = 0, z = a \ (a > 0)$ 和 $y = 0$ 所围的区域；

（4）$\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\ln\left(1+x^2+y^2+z^2\right)}{1+x^2+y^2+z^2} dxdydz$，其中 $\Omega$ 为半球

$\{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le 1, \ z \ge 0\}$；

（5）$\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2 dxdydz$，其中 $\Omega$ 为抛物面 $x^2+y^2 = 2az$ 与球面

$x^2+y^2+z^2=3a^2\quad(a>0)$所围的区域。

（6）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 为平面曲线$\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$绕 $z$ 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围的区域；

（7）$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$，其中闭区域

Ω=$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\ ，\ z\ge 0,y\ge 0\}$；

（8）$\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$，其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid$

$0\le x+y-z\le 1,0\le x-y+z\le 1,0\le y+z-x\le 1\}$。

解（1）应用球坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{4\pi}{5}。$$

（2）应用广义球坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2dr$$

$$=4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2dr，$$

令 $r=\sin t$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\sin^2tdt$$

$$=\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{1}{2}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{4}\pi^2abc。$$

（3）应用柱坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr\int_0^a zdz=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{9}a^2。$$

（4）应用柱坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\frac{z\ln(1+r^2+z^2)}{1+r^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r[\ln^2 2-\ln^2(1+r^2)]dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln^2 2-\frac{\pi}{4}\int_1^2\ln^2 tdt=(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln^2 2)\pi。$$

（5）由于 Ω 关于 $yz$ 平面和 $zx$ 平面都对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega}xydxdydz=\iiint\limits_{\Omega}yzdxdydz=\iiint\limits_{\Omega}zxdxdydz=0，$$

于是

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz，$$

应用柱坐标，就有

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}rdr\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}(r^2+z^2)dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\left(r^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^4}{2a}+\frac{1}{3}(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^6}{24a^3}\right)rdr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\left(3a^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{2}{3}(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{2a}-\frac{r^6}{24a^3}\right)rdr$$

$$=\pi\left(2(3\sqrt{3}-1)a^5-\frac{4}{15}(9\sqrt{3}-1)a^5-\frac{8a^6}{6a}-\frac{16a^8}{96a^3}\right)$$

$$=\frac{108\sqrt{3}-97}{30}\pi a^5。$$

（6）可得 Ω 由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=8$ 所围，应用柱坐标，则

$$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 r^3dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{8}dz=2\pi\int_0^4 r^3(8-\frac{r^2}{2})dr=\frac{1024}{3}\pi。$$

（7）应用球坐标，则

$$\iiint_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}rdr$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{4}{3}\pi。$$

（8）作变换 $u=x+y-z,\ v=x-y+z,\ w=y+z-x$，则 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=-4$，

于是 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\frac{1}{4}$，所以

$$\iiint_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega'}uvw\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{1}{4}\int_0^1udu\int_0^1vdv\int_0^1wdw=\frac{1}{32}。$$

6．求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=Rx\ (R>0)$ 所围立体的体积。

解 $$V=2\iint_{x^2+y^2\le Rx}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}rdr$$

$$=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{6\pi-8}{9}R^3。$$

7．求抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积。

解 联立两个曲面方程，解得交线所在的平面为 $z=2$，所围空间区域

在 $xy$ 平面的投影区域为

$$D: x^2+y^2 \le 4,$$

于是

$$V=\iint_D (6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(6-r^2-r)rdr=\frac{32}{3}\pi。$$

8．求下列曲面所围空间区域的体积：

（1）$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=ax\ (a,b,c>0)$；

（2）$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\ (a,b,c>0)$ 与三张平面 $x=0,y=0,z=0$ 所围的在第一卦限的立体。

解（1）作变量代换 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$，则 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi$。

由于 $x\ge 0$，所以 $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le(a^2\sin\varphi\cos\theta)^{\frac{1}{3}}$。于是

$$V=abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{(a^2\sin\varphi\cos\theta)^{\frac{1}{3}}}r^2dr$$

$$=\frac{1}{3}a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\pi}{3}a^3bc。$$

（2）作变量代换 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos^2\theta\\ y=br\sin\varphi\sin^2\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$，则 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi\sin2\theta$，于是

$$V=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2dr=\frac{abc}{3}。$$

9．设一物体在空间的表示为由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 与平面 $z=5$ 所围成的一立体。其密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$，求此物体的质量。

解 设物体的质量为 $M$，则

$$M=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_{\frac{5}{2}r}^{5}dz=2\pi\int_0^2 r^3(5-\frac{5}{2}r)dr=8\pi。$$

10. 在一个形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器内，已经盛有 $8\pi$ 立方厘米的水，现又倒入 $120\pi$ 立方厘米的水，问水面比原来升高多少厘米。

解 设容器盛有 $8\pi$ 立方厘米水时水面的高为 $h$，则

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{h}}r(h-r^2)dr=8\pi,$$

即$\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{4}h^2=4$，从而解得

$$h=4 \ (\text{cm})。$$

又设容器盛有$128\pi$立方厘米水时水面的高为$H$，则

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{H}}r(H-r^2)dr=128\pi，$$

即$\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{4}H^2=64$，从而解得

$$H=16 \ (\text{cm})，$$

所以水面比原来升高$12$（cm）。

11．求质量为$M$的均匀薄片$\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$对$z$轴上$(0,0,c)$ $(c>0)$点处的单位质量的质点的引力。

解 设薄片对单位质点的引力为$\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$，由对称性，$F_x=F_y=0$。

在均匀薄片上点$(x,y,0)$的附近取一小块，其面积设为$d\sigma=dxdy$，根据万有引力定律，这小块微元对质点的引力为

$$d\boldsymbol{F}=\left(\frac{G\rho x}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy,\frac{G\rho y}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy,-\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy\right)，$$

于是

$$dF_z=-\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy，$$

$$F_z=-\iint_D\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=-G\rho c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{rdr}{(r^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-2\pi G\rho c\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)=-\frac{2MG}{a^2}\left(1-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)，$$

其中G是万有引力常数，M是均匀薄片的质量，$\rho$是均匀薄片的密度。

12．已知球体$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$，在其上任一点的密度在数量上等于该点到原点距离的平方，求球体的质量与重心。

解 设球体的质量为$M$，则

$$M=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4dr=\frac{32}{15}\pi R^5。$$

设重心的坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$。由

$$\iiint_\Omega z(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5dr=\frac{8}{3}\pi R^6，$$

得到

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)dxdydz}{M}=\frac{5}{4}R,$$

所以重心坐标为$(0,0,\frac{5}{4}R)$。

13．证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17}-4)\le\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\le\frac{\pi}{4}。$$

证 首先有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\le\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{1}{4}dxdy=\frac{\pi}{4}。$$

另一方面，由 $\sin^2u\le u^2$，得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\ge\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{16+r^2}}=2\pi(\sqrt{17}-4)。$$

所以

$$2\pi(\sqrt{17}-4)\le\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\le\frac{\pi}{4}。$$

14．设一元函数$f(u)$在$[-1,1]$上连续，证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le1}f(x+y)dxdy=\int_{-1}^1f(u)du。$$

证　作变换 $u=x+y,v=x-y$，则$-1\le u\le1,-1\le v\le1$，变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}。$$

于是

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le1}f(x+y)dxdy=\iint\limits_{D'}f(u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1f(u)du\int_{-1}^1dv=\int_{-1}^1f(u)du。$$

15．设一元函数$f(u)$在$[-1,1]$上连续。证明

$$\iiint\limits_{\Omega}f(z)dxdydz=\pi\int_{-1}^1f(u)(1-u^2)du,$$

其中$\Omega$为单位球$x^2+y^2+z^2\le1$。

证
$$\iiint\limits_{\Omega}f(z)dxdydz=\int_{-1}^1f(z)dz\iint\limits_{\Omega_z}dxdy,$$

其中$\Omega_z=x^2+y^2\le1-z^2$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)dxdydz = \int_{-1}^{1} f(z)dz \iint\limits_{\Omega_z} dxdy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)dz = \pi \int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du \text{。}$$

16．计算下列$n$重积分：

（1）$\int\limits_{\Omega} \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$，其中

$\Omega = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le 1,\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,\cdots,n\}$；

（2）$\int\limits_{\Omega} (x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$，其中

$\Omega$ 为$n$维球体$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 \le 1\}$。

解（1）作变量代换$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 + \cdots + x_n \\ \quad \cdots \\ y_n = \qquad\qquad\qquad x_n \end{cases}$，则$\dfrac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = 1$，从而

$\dfrac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = 1$，于是

$$\int_{\Omega} \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{\Omega'} \sqrt{y_1}\, dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

$$= \int_0^1 \sqrt{y_1}\, dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} dy_3 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n$$

$$= \frac{1}{(n-i)!} \int_0^1 \sqrt{y_1}\, dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} dy_3 \cdots \int_0^{y_{i-1}} y_i{}^{n-i} dy_i$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 y_1{}^{\frac{1}{2}+n-1} dy_1 = \frac{2}{(n-1)!(2n+1)} \text{。}$$

（2）作球面坐标变换$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ x_3 = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1} \end{cases}$，

它把 Ω 变为

$$\Omega' = \left\{(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi_i \le \pi (i = 1, 2, \cdots, n-2), 0 \le \varphi_{n-1} \le 2\pi\right\} \text{。}$$

它的 Jacobi 行列式为

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\text{，}$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n\\&=\int_0^1 r^{n+1}dr\int_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1\cdots\int_0^\pi\sin^2\varphi_{n-3}d\varphi_{n-3}\int_0^\pi\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}\text{。}\end{aligned}$$

由于当 $k$ 为正整数时，$\int_0^\pi\sin^{k-1}\varphi d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k-1}\varphi d\varphi$，利用 Wallis 公式，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi d\varphi=\begin{cases}\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\dfrac{\pi}{2}, & n=2m\\[2mm]\dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1\end{cases}\text{，}$$

于是得到

$$\int_\Omega(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n=\begin{cases}\dfrac{\pi^m}{(m-1)!(m+1)} & n=2m\\[2mm]\dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!(2m+3)} & n=2m+1\end{cases}\text{。}$$

# 习　题　13.4　反常重积分

1.　　讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\dfrac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\dfrac{\varphi(x,y)}{\left(1+x^2+y^2\right)^p}dxdy$，$\mathbf{D}=\{(x,y)\,|0\le y\le 1\}$，而且 $0<m\le\left|\varphi(x,y)\right|\le M$（$m,M$ 为常数）；

(3) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy$，其中 $\varphi(x,y)$ 满足与上题同样的条件；

(4) $\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]}\dfrac{dxdy}{\left|x-y\right|^p}$；

(5) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$。

解（1）由于

$$\iint\limits_{|x|\le A,|y|\le B}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=\int_{-A}^{A}\frac{dx}{1+|x|^p}\int_{-B}^{B}\frac{dy}{1+|y|^q},$$

当 $A,B$ 都趋于正无穷大时，等式右端的积分当仅当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛，所以原积分当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛，而在其他情况下发散。

（2）由于

$$\frac{m}{(1+x^2+y^2)^p}\le\frac{\left|\varphi(x,y)\right|}{(1+x^2+y^2)^p}\le\frac{M}{(1+x^2+y^2)^p},$$

而积分 $\iint\limits_{\mathbf{D}}\dfrac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^p}dxdy$ 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛，当 $p\le\dfrac{1}{2}$ 时发散，所以原积分当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛，当 $p\le\dfrac{1}{2}$ 时发散。

（3）由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p}\le\frac{\left|\varphi(x,y)\right|}{(1-x^2-y^2)^p}\le\frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

而

$$\iint\limits_{\rho^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\rho^1\frac{rdr}{(1-r^2)^p}=-\pi\int_\rho^1\frac{d(1-r^2)}{(1-r^2)^p},$$

当 $\rho\to 0$ 时，等式右端的积分当 $p<1$ 时收敛，当 $p\ge 1$ 时发散，所以原积分当 $p<1$ 时收敛，当 $p\ge 1$ 时发散。

（4）$[0,a]\times[0,a]=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x\le a\right\},\quad D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le y\le a\right\}。$$

则

$$\iint_{[0,a]\times[0,a]}\frac{dxdy}{|x-y|^p}=\iint_{D_1}\frac{dxdy}{(x-y)^p}+\iint_{D_2}\frac{dxdy}{(y-x)^p}$$
$$=\int_0^a dy\int_y^a\frac{dx}{(x-y)^p}+\int_0^a dx\int_x^a\frac{dx}{(y-x)^p},$$
可知当 $p<1$ 时积分收敛，当 $p\ge 1$ 时积分发散。

（5）利用球面坐标，得到
$$\iiint_{\rho^2\le x^2+y^2+z^2\le 1}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}=4\pi\int_\rho^1\frac{dr}{r^{2p-2}},$$
当 $\rho\to 0$ 时，右边的积分当且仅当 $2p-2<1$ 即 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，所以原积分当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\ge\frac{3}{2}$ 时发散。

2．计算下列反常积分：

（1）$\iint_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{x^p y^q}$，其中 $\mathbf{D}=\{(x,y)\,|xy\ge 1, x\ge 1\}$，且 $p>q>1$；

（2）$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$；

（3）$\iiint_{\mathbf{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$。

解 （1）
$$\iint_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{x^p y^q}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{y^q}dy。$$
$$=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-q+1}}dx=\frac{1}{(p-q)(q-1)}。$$

（2）作广义极坐标变换 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，则
$$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy=ab\iint_{r\ge 1}e^{-r^2}rdrd\theta=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}e^{-r^2}rdr=\frac{\pi ab}{e}。$$

（3）
$$\iiint_{\mathbf{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz$$
$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^3=\pi^{\frac{3}{2}}。$$

3．设 $\mathbf{D}$ 是由第一象限内的抛物线 $y=x^2$，圆周 $x^2+y^2=1$ 以及 $x$ 轴所围的平面区域，证明 $\iint_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$ 收敛。

证 取 $r>0$ 充分小，设 $D_r=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x^2, 0\le x\le r\right\}$，$x_0$ 是抛物线 $y=x^2$ 与圆周 $x^2+y^2=1$ 交点的横坐标，则
$$\iint_{\mathbf{D}\setminus D_r}\frac{dxdy}{x^2+y^2}=\int_r^{x_0}dx\int_0^{x^2}\frac{dy}{x^2+y^2}+\int_{x_0}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_r^{x_0}\frac{\arctan x}{x}dx+\int_{x_0}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{x^2+y^2},$$

由于$\lim\limits_{r\to 0}\int_r^{x_0}\frac{\arctan x}{x}dx$存在，所以$\lim\limits_{r\to 0}\iint\limits_{\mathbf{D}\setminus D_r}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$存在，即反常积分$\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$收敛。

4．判别反常积分

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

是否收敛。如果收敛，求其值。

解 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}$收敛，所以$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$收敛，并且

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\pi^2。$$

5．设$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t}}e^{-\frac{tx}{y^2}}dxdy$，求$F'(t)$。

解 当$t>0$时，令$\begin{cases}x=tu\\y=tv\end{cases}$，则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=t^2$，于是

$$F(t)=t^2\cdot\iint\limits_{\substack{0\le u\le 1\\0\le v\le 1}}e^{-\frac{u}{v^2}}dudv,$$

所以

$$F'(t)=2t\cdot\iint\limits_{\substack{0\le u\le 1\\0\le v\le 1}}e^{-\frac{u}{v^2}}dudv=\frac{2F(t)}{t}。$$

当$t=0$时，$F(0)=0$，易得

$$F'(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)-F(0)}{t}=0。$$

6．设函数$f(x)$在$[0,a]$上连续，证明

$$\iint\limits_{0\le y\le x\le a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\pi\int_0^a f(x)dx。$$

证 由于

$$\iint\limits_{0\le y\le x\le a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\int_0^a f(y)dy\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx,$$

在积分$\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx$中，令$x=y\cos^2 t+a\sin^2 t$，则$dx=(a-y)\sin 2tdt$，且当$x:y\to a$时，$t:0\to\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_y^a \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi \text{，}$$

所以

$$\iint\limits_{0\le y\le x\le a} \frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy = \pi\int_0^a f(x)dx \text{。}$$

7．计算积分 $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}dx_1dx_2\cdots dx_n$ 。

解　$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2}dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2}dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2}dx_n = \pi^{\frac{n}{2}} \text{。}$$

# 习 题 13.5 微分形式

1. 计算下列外积：

（1） $(xdx+7z^2dy)\wedge(ydx-xdy+6dz)$；

（2） $(\cos ydx+\cos xdy)\wedge(\sin ydx-\sin xdy)$；

（3） $(6dx\wedge dy+27dx\wedge dz)\wedge(dx+dy+dz)$。

解（1） $(xdx+7z^2dy)\wedge(ydx-xdy+6dz)$

$=-(x^2+7yz^2)dx\wedge dy+42z^2dy\wedge dz-6xdz\wedge dx$。

（2） $(\cos ydx+\cos xdy)\wedge(\sin ydx-\sin xdy)$

$=-\sin(x+y)dx\wedge dy$。

（3） $(6dx\wedge dy+27dx\wedge dz)\wedge(dx+dy+dz)$

$=-21dx\wedge dy\wedge dz$。

2. 设

$$\omega=a_0+a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+a_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4,$$
$$\eta=b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+b_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+b_4\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4。$$

求$\omega+\eta$和$\omega\wedge\eta$。

解 $\omega+\eta=a_0+a_1dx_1+b_1dx_1\wedge dx_2+(a_2+b_2)dx_1\wedge dx_3$

$+b_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+(a_3+b_4)dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$；

$\omega\wedge\eta=a_0b_1dx_1\wedge dx_2+a_0b_2dx_1\wedge dx_3+a_0b_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$

$+a_0b_4dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4+a_1b_4dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$。

3. 求

$$\omega=x_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+(1+x_2{}^2)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+x_2{}^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1$$
$$+(x_3{}^2+x_2{}^2)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3-x_1{}^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_2$$

的标准形式。

解

$$\omega=x_1dx_1\wedge dx_2+dx_1\wedge dx_3+(x_1^2+x_3)dx_2\wedge dx_3-(x_2^2+x_3^2)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3。$$

4. 证明外积满足分配律和结合律。

证 由外积的线性性质，只需对$\omega,\eta,\sigma$分别是$p-$形式、$q-$形式和$r-$形式的情形证明即可。

设$\omega=\sum\limits_I f_I(x)dx_I,\eta=\sum\limits_J g_J(x)dx_J,\sigma=\sum\limits_K h_K(x)dx_K$，则

$$(\omega+\eta)\wedge\sigma=\left(\sum_I f_I(x)dx_I+\sum_J g_J(x)dx_J\right)\wedge\sum_K h_K(x)dx_K$$
$$=\sum_{I,K}f_I(x)h_K(x)dx_I\wedge dx_K+\sum_{J,K}g_J(x)h_K(x)dx_J\wedge dx_K$$
$$=\omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma。$$

$$\sigma\wedge(\omega+\eta)=\sum_K h_K(x)dx_K\wedge\left(\sum_I f_I(x)dx_I+\sum_J g_J(x)dx_J\right)$$
$$=\sum_{K,I}h_K(x)f_I(x)dx_K\wedge dx_I+\sum_{K,J}h_K(x)g_J(x)dx_K\wedge dx_J$$
$$=\sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta。$$
$$(\omega\wedge\eta)\wedge\sigma=\left(\sum_{I,J}f_I(x)g_J(x)dx_I\wedge dx_J\right)\wedge\sum_K h_K(x)dx_K$$
$$=\sum_{I,J,K}f_I(x)g_J(x)h_K(x)dx_I\wedge dx_J\wedge dx_K$$
$$=\left(\sum_I f_I(x)dx_I\right)\wedge\left(\sum_{J,K}g_J(x)h_K(x)dx_J\wedge dx_K\right)$$
$$=\omega\wedge(\eta\wedge\sigma)。$$

5. 写出微分形式 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 在下列变换下的表达式：

（1）柱面坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z\ ;$$

（2）球面坐标变换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi\ 。$$

解 （1）由

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta,dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta,dz=dz\ ,$$

得到

$$dx\wedge dy\wedge dz=rdr\wedge d\theta\wedge dz。$$

（2）由

$$dx=\sin\varphi\cos\theta dr+r\cos\varphi\cos\theta d\varphi-r\sin\varphi\sin\theta d\theta\ ,$$
$$dy=\sin\varphi\sin\theta dr+r\cos\varphi\sin\theta d\varphi+r\sin\varphi\cos\theta d\theta\ ,$$
$$dz=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi\ ,$$

得到

$$dx\wedge dy\wedge dz=r^2\sin\varphi\, dr\wedge d\varphi\wedge d\theta。$$

6. 设 $\omega_j=\sum_{i=1}^n a_i^j\mathrm{d}x_i$ （$j=1,2,\cdots,n$）为 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-形式，证明

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n=\det(a_i^j)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n。$$

证 由于

$$x_i\wedge x_j=-x_j\wedge x_i(i,j=1,2,\cdots,n)\ ,\quad x_i\wedge x_i=0(i=1,2,\cdots,n)\ ,$$

所以

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n=\sum_{i_1,i_2,\cdots i_n=1}^n a_{i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_n}^n\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}$$
$$=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le n}^n(-1)^\sigma a_{i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_n}^n\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

$$= \det(a_i^j) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \text{，}$$

其中$\sigma$是排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$的逆序数。

# 第十四章 曲线积分、曲面积分与场论

## 习 题 14.1 第一类曲线积分与第一类曲面积分

1. 求下列第一类曲线积分：

(1) $\int_{L}(x+y)ds$，其中 L 是以 $O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)$ 为顶点的三角形；

(2) $\int_{L}|y|ds$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$；

(3) $\int_{L}|x|^{1/3}ds$，其中 L 为星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$；

(4) $\int_{L}|x|ds$，其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$；

(5) $\int_{L}(x^2+y^2+z^2)ds$，L 为螺旋线

$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi$ 的一段；

(6) $\int_{L}xyzds$。其中 L 为曲线 $x=t,\ y=\dfrac{2\sqrt{2t^3}}{3},\ z=\dfrac{1}{2}t^2$ 上相应于 $t$ 从 0 变到 1 的一段弧；

(7) $\int_{L}(xy+yz+zx)ds$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线。

解（1） $\int_{L}(x+y)ds=\int_{OA}(x+y)ds+\int_{AB}(x+y)ds+\int_{BO}(x+y)ds$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1(x+x)\sqrt{2}dx+\int_0^1 ydy=1+\sqrt{2}。$$

（2） $\int_{L}|y|ds=\int_0^{2\pi}|\sin t|dt=4$。

（3）令 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$，则 $ds=3a|\sin t\cos t|$，于是

$$\int_{L}|x|^{\frac{1}{3}}ds=3a^{\frac{4}{3}}\int_0^{2\pi}|\sin t\cos^2 t|dt=12a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 tdt=4a^{\frac{4}{3}}。$$

（4）将 L 表示为参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\\ y=\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\end{cases}$，再利用对称性，就有

$$\int_{L}|x|ds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\sqrt{x'^2+y'^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}。$$

注 本题也可利用 L 的极坐标方程 $r^2=\cos 2\theta$，得到

$$\int_{L}|x|ds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}。$$

（5）$\int\limits_{L}(x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}\text{。}$$

（6）$\int\limits_{L}xyzds=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\sqrt{1+2t+t^2}dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}$。

（7）因为在**L**上成立

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)],$$

所以

$$\int\limits_{L}(xy+yz+zx)ds=-\frac{a^2}{2}\int\limits_{L}ds=-\pi a^3\text{。}$$

2. 求椭圆周 $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$ 的质量，已知曲线在点 $M(x,y)$ 处的线密度是 $\rho(x,y)=|y|$。

解　质量 $m=\int\limits_{L}\rho ds=b\int_0^{2\pi}|\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$

$$=2b\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}dt$$

$$=\begin{cases}2b^2+\dfrac{2a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, & \text{当}a>b\\ 4a^2, & \text{当}a=b\\ 2b^2+\dfrac{2a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}, & \text{当}a<b\end{cases}\text{。}$$

3. 求下列曲面的面积：

(1) $z=axy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=a^2\quad(a>0)$ 内的部分；

(2) 锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 被平面 $x+y+z=2a\ \ (a>0)$ 所截的部分；

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 内的部分；

(4) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被两平面 $x+z=0,\ x-z=0\ (x>0,\ y>0)$ 所截部分；

(5) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy\ \ (a>0)$ 内的那部分；

(6) 环面 $\begin{cases}x=(b+a\cos\phi)\cos\varphi,\\ y=(b+a\cos\phi)\sin\varphi,\\ z=a\sin\phi,\end{cases}\quad 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$，其中 $0<a<b$。

解（1）$A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+a^2r^2}rdr=\frac{2\pi}{3a^2}(\sqrt{(1+a^4)^3}-1)\text{。}$$

（2）联立锥面与平面方程，消去$z$，得到

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2,$$

这是所截的部分在$xy$平面上投影区域的边界，它是个椭圆。记

$$D=\left\{(x,y)\middle|(x^2-xy+y^2)+2a(x+y)\le 2a^2\right\},$$

再令$\begin{cases}x=u+v\\ y=u-v\end{cases}$，则区域$D$与区域

$$D'=\left\{(u,v)\middle|(u+2a)^2+3v^2\le 6a^2\right\}$$

对应，且$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=2$，于是所截部分的面积为

$$A=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint_D 2dxdy=\iint_{D'}4dudv=8\sqrt{3}\pi a^2。$$

（3）这部分球面在$xy$平面上的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2\le\dfrac{a^2}{2}\right\}$，于是

$$A=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr=(2-\sqrt{2})\pi a^2。$$

（4）圆柱面方程可写成$y=\sqrt{a^2-x^2}$，区域$D=\left\{(z,x)\middle|-x\le z\le x,0\le x\le a\right\}$，于是

$$A=\iint_D\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}dzdx=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dzdx=\int_0^a dx\int_{-x}^{x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz=2a^2。$$

（5）方程$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$可化为极坐标方程$r^2=a^2\sin 2\theta$，于是

$$A=2\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=2\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}dxdy$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\sqrt{a^2+r^2}rdr=\frac{2}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\sin\theta+\cos\theta)^3-1]d\theta$$

$$=\frac{1}{9}(20-3\pi)a^2。$$

（6）由

$$x_\phi'=-a\sin\phi\cos\varphi,y_\phi'=-a\sin\phi\sin\varphi,z_\phi'=a\cos\phi,$$

$$x_\varphi'=-(b+a\cos\phi)\sin\varphi,y_\varphi'=(b+a\cos\phi)\cos\varphi,z_\varphi'=0,$$

可得

$$E=a^2,G=(b+a\cos\phi)^2,F=0,$$

所以

$$A=\iint_D\sqrt{EG-F^2}d\phi d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\phi)d\phi=4\pi^2ab。$$

4. 求下列第一类曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中$\Sigma$是左半球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，$y\le 0$；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是区域$\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$的边界；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截部分；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中$\Sigma$是圆柱面$x^2+y^2=a^2$介于平面$z=0$与$z=H$之间的部分；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3+y^2+z\right)dS$,其中$\Sigma$是抛物面$2z=x^2+y^2$介于平面$z=0$与$z=8$之间的部分；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}zdS$，其中$\Sigma$是螺旋面$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v,\ 0\le u\le a$，$0\le v\le 2\pi$ 的一部分。

解（1）由对称性，

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}ydS=-\iint\limits_{\Sigma_{zx}}\sqrt{a^2-x^2-z^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}dzdx$$

$$=-\pi a^3。$$

（2）设$\Sigma_1:z=\sqrt{x^2+y^2},\Sigma_2:z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS$$

$$=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi。$$

（3）$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\iint\limits_{\Sigma_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]\sqrt{2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4。$$

（4）设$\Sigma_1:x=\sqrt{a^2-y^2},\Sigma_2:x=-\sqrt{a^2-y^2}\,(0\le z\le H)$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$$

$$=2\iint\limits_{\Sigma_{yz}}\frac{1}{a^2+z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}dydz$$

$$=2\int_0^H \frac{adz}{a^2+z^2}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=2\pi\arctan\frac{H}{a}\text{。}$$

（5）由对称性，有 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dS=\iint\limits_{\Sigma} y^2dS=\iint\limits_{\Sigma} z^2dS$，又由于

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}a^2dS=4\pi a^4,$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS=\frac{13}{12}\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\frac{13}{9}\pi a^4\text{。}$$

（6）由对称性，有 $\iint\limits_{\Sigma}x^3dS=0$，$\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，再由 $\iint\limits_{\Sigma}zdS=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3+y^2+z\right)dS=\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\sqrt{1+r^2}\,r^3dr=\pi\int_0^4\left((1+r^2)^{\frac{3}{2}}-(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right)d(1+r^2)$$

$$=\frac{1564\sqrt{17}+4}{15}\pi\text{。}$$

（7）由 $x'_u=\cos v, y'_u=\sin v, z'_u=0, x'_v=-u\sin v, y'_v=u\cos v, z'_v=1$，得到

$$E=1, G=1+u^2, F=0\text{。}$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{D}v\sqrt{1+u^2}\,dudv=\int_0^{2\pi}vdv\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]\text{。}$$

5．设球面 $\Sigma$ 的半径为 $R$，球心在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上。问当 $R$ 何值时，$\Sigma$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的面积最大？并求该最大面积。

解　不妨设 $\Sigma$ 的球心在 $(0,0,a)$，于是 $\Sigma$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的曲面方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\text{。}$$

将此方程与球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 联立，解得 $z=\frac{2a^2-R^2}{2a}$，这样，$\Sigma$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的部分在 $Oxy$ 平面上的投影为

$$D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2\le R^2-\frac{R^4}{4a^2}\right\},$$

从而面积为

$$S(R)=\iint\limits_{D}\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy=\iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R\sqrt{1-\frac{R^2}{4a^2}}}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr=2\pi R^2(1-\frac{R}{2a})。$$

对$S(R)$求导，得

$$S'(R)=\frac{\pi}{a}(4aR-3R^2)，$$

令$S'(R)=0$，得到$R=\frac{4}{3}a$。由于$S''(\frac{4}{3}a)=-2\pi<0$，所以当$R=\frac{4}{3}a$时，面积最大，面积最大值为

$$S_{\max}=\frac{32}{27}\pi a^3。$$

6. 求密度为$\rho(x,y)=z$的抛物面壳$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), 0\le z\le 1$的质量与重心。

解　质量$M=\iint_\Sigma\rho(x,y)dS=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}dr^2=\frac{12\sqrt{3}+2}{15}\pi。$$

设重心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，$\bar{x}=0,\bar{y}=0$。

$$\iint_\Sigma z\rho(x,y)dS=\frac{1}{4}\iint_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)^2\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^5\sqrt{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}r^4\sqrt{1+r^2}dr^2，$$

作代换　$t=\sqrt{1+r^2}$，得到

$$\iint_\Sigma z\rho(x,y)dS=\frac{\pi}{4}\int_1^{\sqrt{3}}2(t^2-1)^2t^2dt=\frac{66\sqrt{3}-4}{105}\pi，$$

于是

$$\bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\rho(x,y)dS}{M}=\frac{596-45\sqrt{3}}{749}，$$

所以重心为$(0,0,\frac{596-45\sqrt{3}}{749})$。

7. 求均匀球面（半径是$a$，密度是 1）对不在该球面上的质点（质量为 1）的引力。

解　设球面方程为$x^2+y^2+z^2=a^2$，质点的坐标为$(0,0,b)$ $(0\le b\ne a)$。在球面上$(x,y,z)$处取一微元，面积为$dS$，它对质点的引力为

$$dF=\frac{GdS}{x^2+y^2+(z-b)^2}。$$

由对称性，$F_x=F_y=0$，

$$F_z=\iint_\Sigma\frac{G(z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}dS。$$

令$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$，得到$\sqrt{EG - F^2} = a^2\sin\varphi$，于是

$$F_z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{G(a\cos\varphi - b)a^2\sin\varphi}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi,$$

在上述积分中，再令$t = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}$，得到

$$F_z = -\frac{\pi Ga}{b^2}\int_{|a-b|}^{a+b} \frac{b^2 - a^2 + t^2}{t^2} dt = \begin{cases} 0, & b < a \\ -\dfrac{4\pi Ga^2}{b^2}, & b > a \end{cases},$$

所以当$b < a$时，引力$\mathbf{F} = (0,0,0)$；当$b > a$时，引力$\mathbf{F} = (0,0,-\dfrac{4\pi Ga^2}{b^2})$。

8．设$u(x,y,z)$为连续函数，它在$M(x_0, y_0, z_0)$处有连续的二阶导数。记$\Sigma$为以$M$点为中心，半径为$R$的球面，以及

$$T(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} u(x,y,z)dS\text{。}$$

（1）证明：$\lim\limits_{R\to 0} T(R) = u(x_0, y_0, z_0)$；

（2）若$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$，求当$R \to 0$时无穷小量$T(R) - u(x_0, y_0, z_0)$的主要部分。

解（1）由于$u(x,y,z)$在$M(x_0, y_0, z_0)$处连续，所以$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，当$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$时，成立

$$|u(x,y,z) - u(x_0, y_0, z_0)| < \varepsilon\text{。}$$

于是当$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$时，

$$\left|\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} u(x,y,z)dS - u(x_0, y_0, z_0)\right| \le \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} |u(x,y,z) - u(x_0, y_0, z_0)| dS < \varepsilon,$$

所以成立

$$\lim_{R\to 0} T(R) = u(x_0, y_0, z_0)\text{。}$$

（2）令$\begin{cases} x = x_0 + R\xi \\ y = y_0 + R\eta \\ z = z_0 + R\varsigma \end{cases}$，则

$$T(R) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma^*} u(x_0 + R\xi, y_0 + R\eta, z_0 + R\varsigma)dS,$$

其中$\Sigma^* = \{(\xi,\eta,\varsigma) | \xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2 = 1\}$。利用对称性，有

$$\iint_{\Sigma^*} \xi dS = \iint_{\Sigma^*} \eta dS = \iint_{\Sigma^*} \varsigma\, dS = 0,$$

$$\iint_{\Sigma^*}\xi\eta dS=\iint_{\Sigma^*}\eta\varsigma\, dS=\iint_{\Sigma^*}\varsigma\,\xi dS=0,$$

$$\iint_{\Sigma^*}\xi^2 dS=\iint_{\Sigma^*}\eta^2 dS=\iint_{\Sigma^*}\varsigma^2\, dS=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma^*}(\xi^2+\eta^2+\varsigma^2)dS=\frac{4}{3}\pi。$$

由于

$$T'(R)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma^*}[\xi u'_x+\eta u'_y+\varsigma u'_z]dS,$$

$$T''(R)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma^*}[\xi^2 u''_{xx}+\eta^2 u''_{yy}+\varsigma^2 u''_{zz}+2(\xi\eta u''_{xy}+\xi\varsigma u''_{xz}+\eta\varsigma u''_{yz})]dS,$$

以$R=0$代入，得到

$$T'(0)=0$$

$$T''(0)=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}。$$

由 Taylor 公式，即知当$R\to 0$时，无穷小量$T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$的主要部分为 $\frac{R^2}{6}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

9．设$\Sigma$为上半椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$（$z\ge 0$），$\pi$为$\Sigma$在点$P(x,y,z)$处的切平面，$\rho(x,y,z)$为原点$O(0,0,0)$到平面$\pi$的距离，求$\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$。

**解**　因为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$在$P(x,y,z)$点的法向量为$\vec{n}=(x,y,2z)$，

所以切平面$\pi$的方程为

$$xX+yY+2zZ=2,$$

从而原点到$\pi$的距离为

$$\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}。$$

令$\begin{cases} x=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta \\ z=\cos\varphi \end{cases}$，则$\sqrt{x^2+y^2+4z^2}=\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}$，由

$$x'_\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta,\ y'_\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta,\ z'_\varphi=-\sin\varphi，$$
$$x'_\theta=-\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta,\ y'_\theta=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta,\ z'_\theta=0，$$

得到

$$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}，$$

由此得到

$$\iint_\Sigma\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi(\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi)d\varphi=\frac{3}{2}\pi。$$

**注**　本题也可由$\Sigma$：$z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2-y^2}$投影到$xy$平面上来计算得到

$$\iint_\Sigma\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)dxdy=\frac{3}{2}\pi。$$

10．设$\Sigma$是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$。证明

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du，$$

其中$a,b,c$为不全为零的常数，$f(u)$是$|u|\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}$上的一元连续函数。

**证**　将$xyz-$坐标系保持原点不动旋转成$x'y'z'-$坐标系，使$z'$轴上的单位向量为$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$，由于旋转变换是正交变换，保持度量不变，所以球面$\Sigma$上的面积元$dS$也不变。设球面$\Sigma$上一点$(x,y,z)$的新坐标为$(x',y',z')$，则$ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}z'$，于是

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\iint_\Sigma f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}z')dS。$$

下面计算这一曲面积分。令球面$\Sigma$的参数方程为

$$x'=\sin\varphi\cos\theta，\quad y'=\sin\varphi\sin\theta，\quad z'=\cos\varphi，$$

则

$$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi，$$

所以

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$$ 。

11．设有一高度为 $h(t)$（$t$ 为时间）的雪堆在溶化过程中，其侧面满足方程（设长度单位为 cm，时间单位为 h）

$$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$$ 。

已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9）。问高度为 130cm 的雪堆全部融化需多少时间？

解　雪堆的体积为

$$V(t)=\iint_D\left(h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left(h(t)-\frac{2}{h(t)}r^2\right)rdr=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

雪堆的侧面积为

$$S(t)=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\frac{1}{h(t)}\iint_D\sqrt{h^2(t)+16(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{h(t)}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\,rdr=\frac{13}{12}\pi h^2(t)。$$

由 $\frac{dV}{dt}=-\frac{9}{10}S(t)$，得到 $h'(t)=-\frac{13}{10}$，注意到 $h(0)=130\,(cm)$，得到

$$h(t)=130-\frac{13}{10}t。$$

因为当雪堆全部融化即 $h(t)=0$ 时，有 $t=100\,(h)$，所以雪堆全部融化需 100 小时。

# 习 题 14.2 第二类曲线积分与第二类曲面积分

1. 求下列第二类曲线积分：

(1) $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中 **L** 是以 $A(1,0), B(2,0), C(2,1), D(1,1)$ 为顶点的正方形，方向为逆时针方向；

(2) $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 **L** 是抛物线的一段：$y=x^2, -1\le x\le 1$，方向由 $(-1,1)$ 到 $(1,1)$；

(3) $\int_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 **L** 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为逆时针方向；

(4) $\int_L ydx-xdy+(x^2+y^2)dz$，其中 **L** 是曲线 $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=a^t$，$0\le t\le 1$，方向由 $(e,e^{-1},a)$ 到 $(1,1,1)$；

(5) $\int_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$，**L** 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的直线段；

(6) $\int_L ydx+zdy+xdz$，**L** 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2az, \\ x+z=a \quad (a>0), \end{cases}$ 若从 $z$ 轴的正向看去，**L** 的方向为逆时针方向；

(7) $\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，**L** 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y=x\tan\alpha \quad (0<\alpha<\pi), \end{cases}$，若从 $x$ 轴的正向看去，这个圆周的方向为是逆时针方向。

解：(1) $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$

$$=\left\{\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right\}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_1^2 x^2dx+\int_0^1(4-y^2)dy+\int_2^1(x^2+1)dx+\int_1^0(1-y^2)dy=2。$$

(2) $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^1[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)2x]dx$

$$=\int_{-1}^1(x^2-4x^4)dx=-\frac{14}{15}。$$

(3) $\int_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$

$=\int_0^{2\pi}[(\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t]dt=-2\pi$。

（4） $I=\int\limits_{\mathbf{L}} ydx-xdy+(x^2+y^2)dz=\int_1^0[2+(e^{2t}+e^{-2t})a^t\ln a]dt$。

当 $a=e^2$ 时，$I=\int_1^0(4+2e^{4t})dt=-\frac{1}{2}(7+e^4)$；

当 $a=e^{-2}$ 时，$I=\int_0^1 2e^{-4t}dt=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$；

当 $a\neq e^2$ 且 $a\neq e^{-2}$ 时，

$$I=\ -2+\ln a\int_1^0[(ae^2)^t+(ae^{-2})^t]dt=-2+\left(\frac{1-ae^2}{\ln a+2}+\frac{1-ae^{-2}}{\ln a-2}\right)\ln a。$$

（5） $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz=\int_0^1[1+t+2(1+2t)+3(1+3t)]dt=13$。

（6）由曲线积分的定义， 以 $z=a-x$ 代入积分，得到

$$\int\limits_L ydx+zdy+xdz=\int\limits_{L_{xy}}(y-x)dx+(a-x)dy，$$

其中 $L_{xy}$ 为 $L$ 在 $xy$ 平面上的投影曲线（椭圆） $2x^2+y^2=a^2$，取逆时针方向。

令 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}a\cos t,\ y=a\sin t,\ t:0\to 2\pi$，则

$$\int\limits_L ydx+zdy+xdz$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}[(\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)+(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)\cos t]dt$$
$$=-\sqrt{2}\pi a^2。$$

（7）由曲线积分的定义，以 $y=x\tan\alpha$ 代入积分，得到

$$\int\limits_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=(1-\tan\alpha)\int\limits_{L_{zx}}xdz-zdx，$$

其中 $L_{zx}$ 为 $L$ 在 $zx$ 平面上的投影曲线（椭圆） $z^2+x^2\sec^2\alpha=1$，取顺时针方向。

令 $x=\cos\alpha\sin t,\ z=\cos t,\ t:2\pi\to 0$，则

$$\int\limits_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$
$$=(1-\tan\alpha)\int_{2\pi}^0\cos\alpha(-\sin^2 t-\cos^2 t)dt=2\pi(\cos\alpha-\sin\alpha)。$$

2. 证明不等式

$$\left|\int\limits_{\mathbf{L}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\leq MC，$$

其中 $C$ 是曲线 $\mathbf{L}$ 的弧长，$M=\max\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\,|(x,y)\in\mathbf{L}\}$。记圆周

$x^2+y^2=R^2$为$\mathbf{L}_R$，利用以上不等式估计

$$I_R=\int_{\mathbf{L}_R}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2},$$

并证明

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0。$$

证　由 Schwarz 不等式及$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，可得

$$\left|\int_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|=\left|\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds\right|$$
$$\le\int_L\left|P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\right|ds$$
$$\le\int_L\sqrt{\left[P^2(x,y)+Q^2(x,y)\right]\left[\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right]}ds\le M\int_L ds=MC。$$

在积分$I_R=\int_{L_R}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$中，令$P(x,y)=\frac{y}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$，$Q(x,y)=\frac{-x}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$，则

$$P^2(x,y)+Q^2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}\le\frac{16}{(x^2+y^2)^3},$$

于是 $|I_R|\le\frac{4}{R^3}C=\frac{8\pi}{R^2}$，所以

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0。$$

3. 方向依纵轴的负方向，且大小等于作用点的横坐标的平方的力构成一个力场。求质量为$m$的质点沿抛物线$y^2=1-x$从点$(1,0)$移到$(0,1)$时，场力所作的功。

解　$W=\int_L\boldsymbol{F}d\boldsymbol{s}=-\int_0^1(1-y^2)^2dy=-\frac{8}{15}$。

4. 计算下列第二类曲面积分：

（1）$\iint_\Sigma(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$，其中Σ是中心在原点，边长为$2h$的立方体$[-h,h]\times[-h,h]\times[-h,h]$的表面，方向取外侧；

（2）$\iint_\Sigma yzdzdx$，其中Σ是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分，方向取上侧；

（3）$\iint_\Sigma zdydz+xdzdx+ydxdy$，其中Σ是柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$和$z=4$所截部分，方向取外侧；

（4）$\iint_\Sigma zxdydz+3dxdy$，其中Σ是抛物面$z=4-x^2-y^2$在$z\ge0$部分，方向

取下侧；

（5）$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分，方向取上侧；

（6）$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+5)dxdy$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le h$），方向取下侧。

（7）$\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx$，其中 Σ 是抛物面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1$，$y=2$ 所围立体的表面，方向取外侧。

（8）$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy$，其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，方向取外侧；

（9）$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，方向取外侧。

解 （1）将 Σ 的上、下、左、右、前、后六个面分别记为 $\Sigma_i\ (i=1,2,3,4,5,6)$。则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dydz=\iint\limits_{\Sigma_5}(x+y)dydz+\iint\limits_{\Sigma_6}(x+y)dydz$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_5}xdydz+\iint\limits_{\Sigma_6}xdydz=2h\iint\limits_{D_{yz}}dydz=8h^3,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(y+z)dzdx=\iint\limits_{\Sigma_3}(y+z)dzdx+\iint\limits_{\Sigma_4}(y+z)dzdx$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_3}ydzdx+\iint\limits_{\Sigma_4}ydzdx=2h\iint\limits_{D_{zx}}dzdx=8h^3,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(z+x)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(z+x)dxdy+\iint\limits_{\Sigma_2}(z+x)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}zdxdy+\iint\limits_{\Sigma_2}zdxdy=2h\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=8h^3,$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy=24h^3。$$

（2）设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由 $dzdx=\cos\beta\,dS$ 与 $dxdy=\cos\gamma\,dS$，得到 $dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=\frac{c^2y}{b^2z}dxdy$。由于 Σ 的方向取上侧，它在 $xy$ 平面的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$，于是

$$\iint_{\Sigma} yzdzdx = \iint_{\Sigma} \frac{c^2}{b^2} y^2 dxdy = \iint_{D} \frac{c^2}{b^2} y^2 dxdy$$

$$= abc^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4} abc^2 \text{。}$$

（3）解法一

取曲面$\Sigma$的参数表示$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = z \end{cases}$，$D = \{(\theta, z) |\ 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le 4\}$，则

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)} = \cos\theta \text{，} \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)} = \sin\theta \text{，} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)} = 0 \text{。}$$

由于$\Sigma$的方向取外侧，于是

$$\iint_{\Sigma} zdydz + xdzdx + ydxdy = \iint_{D} \left[ z\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)} + \cos\theta \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)} + \sin\theta \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)} \right] d\theta dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_0^4 zdz + \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^4 dz = 0 \text{。}$$

解法二

由于曲面$\Sigma$的单位法向量为$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$，可知

$$\iint_{\Sigma} ydxdy = 0 \text{。}$$

将柱面$\Sigma$分成前后两部分$\Sigma_1, \Sigma_2$，其中$\Sigma_1 : x = \sqrt{1-y^2}, \Sigma_2 : x = -\sqrt{1-y^2}$，则

$$\iint_{\Sigma} zdydz = \iint_{\Sigma_1} zdydz + \iint_{\Sigma_2} zdydz = \iint_{D_{yz}} zdydz - \iint_{D_{yz}} zdydz = 0 \text{，}$$

类似地可得$\iint_{\Sigma} xdzdx = 0$，所以

$$\iint_{\Sigma} zdydz + xdzdx + ydxdy = 0 \text{。}$$

（4）设曲面$\Sigma$的单位法向量为$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，由$dydz = \cos\alpha\, dS$与$dxdy = \cos\gamma\, dS$，得到$dydz = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} dxdy = 2xdxdy$。由于$\Sigma$的方向取下侧，它在$xy$平面的投影区域为$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1\}$，于是

$$\iint_{\Sigma} zxdydz + 3dxdy = \iint_{\Sigma} (2x^2 z + 3) dxdy = -\iint_{D} \left[ 2x^2 (4 - x^2 - y^2) + 3 \right] dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2[2r^2\cos^2\theta(4-r^2)+3]rdr=-\frac{32}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta-12\pi=-\frac{68}{3}\pi\text{。}$$

（5）平面 Σ 的方程为 $x-y+z=1$，方向取上侧，由此可知 $dydz=dxdy$，$dzdx=-dxdy$，于是

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]-[2f(x,y,z)+y]+[f(x,y,z)+z]\}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{1}{2}\text{。}$$

（6）由对称性，$\iint_{\Sigma}x^2dydz=0$，$\iint_{\Sigma}y^2dzdx=0$，所以

$$\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+5)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2+5)dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h(r^2+5)rdr=-\frac{\pi}{2}(h^4+10h^2)\text{。}$$

（7）记 $\Sigma_1:y=x^2+z^2(1\le y\le 2)$，方向取外侧；$\Sigma_2:y=1(x^2+z^2\le 1)$，方向取左侧；$\Sigma_3:y=2(x^2+z^2\le 2)$，方向取右侧。则

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\iint_{D_{1zx}}\frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}e^rdr=-2\pi(e^{\sqrt{2}}-e)\text{，}$$

$$\iint_{\Sigma_2}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\iint_{D_{2zx}}\frac{e}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1edr=-2e\pi\text{，}$$

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=\iint_{D_{3zx}}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}}dr=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\pi\text{，}$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\pi\text{。}$$

（8）设 $\Sigma_1,\Sigma_2$ 分别表示上、下两半椭球面，方向分别取上、下侧。则

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dxdy=\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{z}dxdy+\iint_{\Sigma_2}\frac{1}{z}dxdy=2\iint_{D_{xy}}\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{abrdr}{c\sqrt{1-r^2}}=\frac{4\pi ab}{c}\text{，}$$

由对称性，可得

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{y}dzdx=\frac{4\pi ac}{b}\text{，}\quad\iint_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz=\frac{4\pi bc}{a}\text{，}$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy=\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\text{。}$$

（9）设$\Sigma_1,\Sigma_2$分别表示上、下两半球面，方向分别取上、下侧。则

$$\iint_{\Sigma} z^2 dxdy = \iint_{\Sigma_1} z^2 dxdy + \iint_{\Sigma_2} z^2 dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} [c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy - \iint_{D_{xy}} [c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy$$

$$= 4c \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dxdy = \frac{8}{3}\pi c R^3 \text{。}$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz = \frac{8}{3}\pi a R^3, \iint_{\Sigma} y^2 dzdx = \frac{8}{3}\pi b R^3 \text{，}$$

所以

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3 \text{。}$$

# 习 题 14.3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

1． 利用 Green 公式计算下列积分：

(1) $\int_{L}(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$，其中 L 是以 $A(1,1),B(3,2),C(2,5)$ 为顶点的三角形的边界，逆时针方向；

(2) $\int_{L}xy^2dx-x^2ydy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，逆时针方向；

(3) $\int_{L}\left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\right)dx+\left(x^2\sin x-2ye^x\right)dy$，其中 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$，逆时针方向；

(4) $\int_{L}e^x\left[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\right]$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段；

(5) $\int_{L}\left(x^2-y\right)dx-\left(x+\sin^2 y\right)dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分，方向从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$；

(6) $\int_{L}\left[e^x\sin y-b(x+y)\right]dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$，其中 $a,b$ 是正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的一段；

(7) $\int_{L}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，$R$ 为半径的圆周（$R>1$），逆时针方向；

(8) $\int_{L}\dfrac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$， 其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向；

(9) $\int_{L}\dfrac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y+y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}$，其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线，逆时针方向。

解 (1) $\int_{L}(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy=\iint_{D}(-4x-2y)dxdy$

$$=-2\int_1^2dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(2x+y)dy-2\int_2^3dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{11-3x}(2x+y)dy=-\frac{140}{3}。$$

(2) $\int_{L}xy^2dx-x^2ydy=\iint_{D}(-2xy-2xy)dxdy=-4\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^a r^3dr=0$。

(3) $\int_{L}\left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\right)dx+\left(x^2\sin x-2ye^x\right)dy$

$$=\iint_D 0dxdy=0。$$

（4）设 $\mathbf{L}_1: y=0, x:0\to\pi$，则

$$\int_{\mathbf{L}+\mathbf{L}_1^-} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=\iint_D e^x ydxdy=\int_0^\pi e^x dx\int_0^{\sin x} ydy=\frac{e^\pi-1}{5},$$

所以

$$\int_{\mathbf{L}} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$$

$$=\int_{\mathbf{L}_1} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]+\frac{e^\pi-1}{5}=\frac{e^\pi-1}{5}。$$

（5）设 $\mathbf{L}_1: y=0, x:0\to 2$，则

$$\int_{\mathbf{L}+\mathbf{L}_1^-}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\iint_D(1-1)dxdy=0,$$

所以

$$\int_{\mathbf{L}}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_{\mathbf{L}_1}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}。$$

（6）设 $\mathbf{L}_1: y=0, x:0\to 2a$，则

$$\int_{\mathbf{L}+\mathbf{L}_1}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy=\iint_D(b-a)dxdy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

所以

$$\int_{\mathbf{L}}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)-\int_{\mathbf{L}_1}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+b\int_0^{2a}xdx=(2+\frac{\pi}{2})a^2b-\frac{\pi}{2}a^3。$$

（7）设 $P(x,y)=-\dfrac{y}{4x^2+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $\mathbf{L}_1: 4x^2+y^2=1$，逆时针方向，由 Green 公式，

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_{\mathbf{L}_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}。$$

令 $x=\dfrac{1}{2}\cos t, y=\sin t$，得到

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_{\mathbf{L}_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t)dt=\pi。$$

（8）设 $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+4y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径$\mathbf{L}_1: x^2+4y^2=1$，逆时针方向，由 Green 公式，

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\int_{\mathbf{L}_1}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}。$$

令 $x=\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t$，得到

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\int_{\mathbf{L}_1}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt=\pi。$$

（9）设 $P(x,y)=\frac{e^x(x\sin y-y\cos y)}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{e^x(x\cos y+y\sin y)}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{[(x^2+y^2)x+y^2-x^2]\cos y+(x^2+y^2-2x)y\sin y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_r$：$x^2+y^2=r^2$，即 $x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ t:0\to 2\pi$，由 Green 公式，

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y+y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{\mathbf{L}_r}\frac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y+y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}。$$

于是

$$I=\int_{\mathbf{L}_r}\frac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y+y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}e^{r\cos t}\cos(r\sin t)dt,$$

令 $r\to 0$，即得到

$$I=2\pi。$$

2．利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

（1）星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

（2）抛物线 $(x+y)^2=ax\ (a>0)$ 与 $x$ 轴；

（3）旋轮线的一段：$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}\quad t\in[0,2\pi]$ 与 $x$ 轴。

解（1） $S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{3}{8}\pi a^2$。

（2）令 $y=tx$，则 $x=\frac{a}{(1+t)^2}, y=\frac{at}{(1+t)^2}$， $t:0\to+\infty$。于是

$$S=-\int_L ydx=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t)^5}dt=\frac{1}{6}a^2。$$

（3） $S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2-t\sin t-2\cos t)dt=3\pi a^2$。

3. 先证明曲线积分与路径无关，再计算积分值：

（1） $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$；

（2）$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)dx+\phi(y)dy$，其中$\varphi(x),\phi(y)$为连续函数；

（3）$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿不通过原点的路径。

**解**（1）设$P(x,y)=x-y, Q(x,y)=-(x-y)$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为$\mathbf{L}: y=x, x:0\to 1$，于是

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)=0$$

（2）设$P(x,y)=\varphi(x), Q(x,y)=\phi(y)$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为$\mathbf{L}$：折线$\overline{ABC}$，其中$A(2,1),B(1,1),C(1,2)$，于是

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)dx+\phi(y)dy=\int_2^1\varphi(x)dx+\int_1^2\phi(y)dy=\int_1^2[\phi(t)-\varphi(t)]dt。$$

（3）设$P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为$\mathbf{L}$：折线$\overline{ABC}$，其中$A(1,0),B(6,0),C(6,8)$，于是

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_1^6 dx+\int_0^8\frac{ydy}{\sqrt{36+y^2}}=9。$$

4．证明$(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$在整个$xy$平面上是某个函数的全微分，并找出这样一个原函数。

**证** 设$P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x, Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y+2y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x}，$$

所以$(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$在整个$xy$平面上是某个函数的全微分。

设这个函数为$u(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy+C$$

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)dy=x^2\cos y+y^2\sin x+C。$$

5．证明$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$在除去$y$的负半轴及原点的裂缝$xy$平面上是某个函数的全微分，并找出这样一个原函数。

**证** 设$P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$在除去$y$的负半轴及原点的裂缝$xy$平面上是某个函数的全微分。

设这个函数为$u(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_0^x\frac{xdx}{x^2+1}+\int_1^y\frac{ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C。$$

6．设$Q(x,y)$在$xy$平面上具有连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关，并且对任意$t$恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy,$$

求$Q(x,y)$。

解　因为曲线积分$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关，所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$，两边关于$x$积分，即得到$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$，其中$\varphi$待定。

由条件$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$，可得

$$\int_0^1(t^2+\varphi(y))dy=\int_0^t(1+\varphi(y))dy,$$

两边对$t$求导，得到$2t=1+\varphi(t)$，即$\varphi(y)=2y-1$，所以

$$Q(x,y)=x^2+2y-1。$$

7．确定常数$\lambda$，使得右半平面$x>0$上的向量函数$\boldsymbol{r}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{j}$为某二元函数$u(x,y)$的梯度，并求$u(x,y)$。

解　由题意，$\frac{\partial[2xy(x^4+y^2)^\lambda]}{\partial y}=\frac{\partial[-x^2(x^4+y^2)^\lambda]}{\partial x}$，即

$$2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1},$$

化简后，求得 $\lambda=-1$。这时

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}+C=-\int_0^y\frac{x^2dy}{x^4+y^2}+C=-\arctan\frac{y}{x^2}+C。$$

8．设一力场为$\boldsymbol{F}=(3x^2y+8xy^2)\boldsymbol{i}+(x^3+8x^2y+12ye^y)\boldsymbol{j}$，证明质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关。

证　设$P(x,y)=3x^2y+8xy^2, Q(x,y)=x^3+8x^2y+12ye^y$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关。

9．利用 Gauss 公式计算下列曲面积分：

（1）　$\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，$\Sigma$为立方体$0\le x,y,z\le a$的表面，方

向取外侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$，其中 Σ 为闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，方向取外侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$，其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h\ (h>0)$ 之间的部分，方向取下侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy$，其中 Σ 是由 $xy$ 平面上的曲线 $x=e^y\ (0\le y\le a)$ 绕 $x$ 轴旋转而成的旋转面，曲面的法向量与 $x$ 轴的正向的夹角为钝角；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$（$0\le z\le 1$），曲面的法向量与 $z$ 轴的正向的夹角为锐角；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$（$a>0$），其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

(8) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 Σ 是

(i) 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取外侧；

(ii) 抛物面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\quad(z\ge 0)$，方向取上侧。

解 (1) 设 Ω 是 Σ 所围的空间区域，则

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dxdydz=6\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a zdz=3a^4。$$

(2) 设 Ω 是 Σ 所围的空间区域，作变换 $\varphi:\begin{cases}u=x-y+z\\v=y-z+x\\w=z-x+y\end{cases}$，则

$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=4$，且变换 $\varphi$ 将 Ω 变为 $\Omega'=\left\{(u,v,w)\mid\ |u|+|v|+|w|\le 1\right\}$，记 $\Omega''$ 是 $\Omega'$ 在第一象限的部分，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{3}{4}dudvdw=6\iiint\limits_{\Omega''}dudvdw=1。$$

（3）补充$\Sigma_1: z=h(x^2+y^2\le h^2)$，方向取上侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，因为$\Omega$的对称性，有$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz=0$。由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dxdydz$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h rdr\int_r^h zdz=\frac{\pi}{2}h^4,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}h^2dxdy=-\frac{1}{2}\pi h^4。$$

（4）补充$\Sigma_1: z=0\,(x^2+y^2\le R^2)$，方向取下侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=2\pi R^3,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi R^3-\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi R^3。$$

（5）由题意，可得 $\Sigma: x=e^{\sqrt{y^2+z^2}}\,(y^2+z^2\le a^2)$，方向取后侧。补充$\Sigma_1: x=e^a(y^2+z^2\le a^2)$，方向取前侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy=\iiint\limits_{\Omega}0dxdydz=0,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy=-\iint\limits_{\Sigma_1}2(1-e^{2a})dydz=2\pi a^2(e^{2a}-1)。$$

（6）补充$\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\le 1)$，方向取下侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)dydz+zdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=-\frac{3}{2}\pi,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy=-\frac{3}{2}\pi-\iint\limits_{\Sigma_1}1dxdy=-\frac{\pi}{2}。$$

（7）由题意，

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+(a+z)^2dxdy。$$

补充$\Sigma_1: z=0\,(x^2+y^2\le a^2)$，方向取下侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间

区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} axdydz+(a+z)^2dxdy=-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)dxdydz$$

$$=-2\pi a^4-2\pi\int_{-a}^{0}z(a^2-z^2)dz=-\frac{3}{2}\pi a^4,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} axdydz+(a+z)^2dxdy=-\frac{3}{2}\pi a^4-\iint\limits_{\Sigma_1}a^2dxdy=-\frac{1}{2}\pi a^4,$$

从而

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=-\frac{1}{2}\pi a^3。$$

（8）（i）记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，设原积分为 $\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}。$$

设 $\Sigma'=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\}$，方向为外侧，设 $\Omega$ 是 $\Sigma+(-\Sigma')$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+(-\Sigma')}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=0。$$

由于 $\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r}$，

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}\cos\alpha dydz+\cos\beta dzdx+\cos\gamma dxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}dS=4\pi。$$

**注** 对上面的积分，也可取 $\Sigma'$ 的参数表示为 $\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta\\ z=\varepsilon\cos\varphi\end{cases}$，

其中 $(\varphi,\theta)\in D'=\{0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{D'}\sin\varphi d\varphi d\theta=4\pi。$$

（ii）设$\Sigma'=\{(x,y,z)\left|\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\le 1, z=0\}-\{(x,y,z)\right|x^2+y^2<\varepsilon^2, z=0\}$，方向为下侧，$\Sigma''=\{(x,y,z)\left|x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2, z\ge 0\}\right.$，方向为下侧。则由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'+\Sigma''}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=0\text{，}$$

由此得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{-\Sigma''}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}\cos\alpha dydz+\cos\beta dzdx+\cos\gamma dxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}dS=2\pi\text{。}$$

**注**　对上面的积分，也可取$\Sigma''$的参数表示为 $\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta\\ z=\varepsilon\cos\varphi\end{cases}$，

其中$(\varphi,\theta)\in D''=\{0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{-\Sigma''}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{D''}\sin\varphi d\varphi d\theta=2\pi\text{。}$$

10．　利用 Gauss 公式证明阿基米德原理：将物体全部浸没在液体中时，物体所受的浮力等于与物体同体积的液体的重量，而方向是垂直向上的。

**证**　以液面为$xy$平面，垂直向上的轴为$z$轴，在物体表面上点$(x,y,z)$处任取一微元，其面积为$dS$，设$\mathbf{n}$为物体表面上点$(x,y,z)$处的单位（外）法向量，$\rho$为液体密度。则这小块面积所受的压力大小为

$$d\mathbf{F}=\rho z d\mathbf{S}\text{，}$$

它在三个方向的分力分别为

$$dF_x=\rho z\cos(\mathbf{n},x)dS,\ dF_y=\rho z\cos(\mathbf{n},y)dS,\ dF_z=\rho z\cos(\mathbf{n},z)dS\text{，}$$

于是由 Gauss 公式，

$$F_x=\rho\iint\limits_{\Sigma}z\cos(\mathbf{n},x)dS=0,\ F_y=\rho\iint\limits_{\Sigma}z\cos(\mathbf{n},y)dS=0\text{，}$$

$$F_z = \rho\iint_\Sigma z\cos(\mathbf{n}, z)dS = \rho\iiint_\Omega dxdydz = \rho V，$$

这就是所要证明的。

11．设某种流体的速度场为$\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$，求单位时间内流体

（1）流过圆柱：$x^2 + y^2 \le a^2$，$0 \le z \le h$的侧面（方向取外侧）的流量；

（2）流过该圆柱的全表面（方向取外侧）的流量。

解（1）设$\Sigma_1 : z = 0\ (x^2 + y^2 \le a^2)$，方向取下侧，$\Sigma_2 : z = h\,(x^2 + y^2 \le a^2)$，方向取上侧，$D$是$\Sigma_1, \Sigma_2$在$xy$平面上的投影区域。由于

$$\iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = -\iint_D xydxdy = 0，\quad \iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = \iint_D xydxdy = 0，$$

由 Gauss 公式，

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega 0dxdydz = 0，$$

所以流量

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = 0。$$

（2）由（1）可知，流过该圆柱的全表面的流量$\iint_\Sigma \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = 0$。

12．利用 Stokes 公式计算下列曲线积分：

（1）$\int_{\mathbf{L}} ydx + zdy + xdz$，其中$\mathbf{L}$是球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$与平面$x + y + z = 0$的交线（它是圆周），从$x$轴的正向看去，此圆周的方向是逆时针方向；

（2）$\int_{\mathbf{L}} 3zdx + 5xdy - 2ydz$，其中$\mathbf{L}$是圆柱面$x^2 + y^2 = 1$与平面$z = y + 3$的交线（它是椭圆），从$z$轴的正向看去，是逆时针方向；

（3）$\oint_{\mathbf{L}} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$，其中$\mathbf{L}$为圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$和平面$\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1\ (a > 0, h > 0)$的交线（它是椭圆），从$x$轴的正向看去，是逆时针方向；

（4）$\int_{\mathbf{L}} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$，其中$\mathbf{L}$是用平面$x + y + z = \dfrac{3}{2}$截立方体$0 \le x, y, z \le 1$的表面所得的截痕，从$x$轴的正向看去，是逆时针方向；

（5）$\int_{\mathbf{L}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$，其中$\mathbf{L}$是沿着螺线

$x = a\cos\varphi$，$y = a\sin\varphi$, $z = \dfrac{h}{2\pi}\varphi$ 从点$A(a,0,0)$至点$B(a,0,h)$的路径；

（6）$\int_{\mathbf{L}}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中$\mathbf{L}$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从$z$轴的正向看去，是逆时针方向。

解（1）设$\Sigma$是$\mathbf{L}$所围的平面$x+y+z=0$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧）。由 Stokes 公式，

$$\int_{\mathbf{L}} ydx+zdy+xdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=-\iint_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy$$

$$=-\sqrt{3}\iint_{\Sigma} dS=-\sqrt{3}\pi a^2。$$

（2）设$\Sigma$是$\mathbf{L}$所围的平面$z=y+3$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧），则$\Sigma$是一个长半轴为$\sqrt{2}$、短半轴为$1$的椭圆。由 Stokes 公式，

$$\int_{\mathbf{L}} 3zdx+5xdy-2ydz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}-2dydz+3dzdx+5dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}(0-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}})dS=2\pi。$$

（3）设$\Sigma$是$\mathbf{L}$所围的平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧）。由 Stokes 公式，

$$\int_{\mathbf{L}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-2\iint_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy$$

$$=-2\iint_{\Sigma}\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS=-2\pi a(a+h)。$$

（4）设$\Sigma$是$\mathbf{L}$所围的平面$x+y+z=\frac{3}{2}$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧），则$\Sigma$是一个边长为$\frac{1}{\sqrt{2}}$的正六边形。由 Stokes 公式，

$$\int_{\mathbf{L}}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=-2\iint_{\Sigma}(y+z)dydz+(z+x)dzdx+(x+y)dxdy$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=-2\sqrt{3}\iint_{\Sigma}dS=-\frac{9}{2}。$$

（5）设$\mathbf{L}_1:\begin{cases} x=a \\ y=0 \\ z=t \end{cases}\quad (t:0\to h)$，由 Stokes 公式，

$$\int_{L+(-L_1)}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz=0，$$

于是

$$\int_{L}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz=\int_0^h z^2dz=\frac{1}{3}h^3。$$

(6) 设$\Sigma$是$\mathbf{L}$所围的平面$x+y+z=2$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧）。设$\Sigma$在$xy$平面的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$，则$\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy=\iint\limits_{D_{xy}}ydxdy=0$。由 Stokes 公式，

$$\begin{aligned}&\int_{L}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz\\&=-2\iint\limits_{\Sigma}(y+2z)dydz+(z+3x)dzdx+(x+y)dxdy\\&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(4x+2y+3z)dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+6)dS\\&=-2\iint\limits_{D_{xy}}(x-y+6)dxdy=-24。\end{aligned}$$

13．设$f(t)$是$\mathbf{R}$上恒为正值的连续函数，$\mathbf{L}$是逆时针方向的圆周$(x-a)^2+(y-a)^2=1$。证明

$$\int_{L}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi。$$

证　设$D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-a)^2\le 1\}$。由 Green 公式，

$$\begin{aligned}&\int_{L}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint\limits_{D}(f(y)+\frac{1}{f(x)})dxdy\\&=\iint\limits_{D}(f(x)+\frac{1}{f(x)})dxdy\ge\iint\limits_{D}2dxdy=2\pi，\end{aligned}$$

其中第二个等式利用了区域的对称性。

14．设$\mathbf{D}$为两条直线$y=x$，$y=4x$和两条双曲线$xy=1$，$xy=4$所围成的区域，$F(u)$是具有连续导数的一元函数，记$f(u)=F'(u)$。证明

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du，$$

其中$\partial D$的方向为逆时针方向。

证：由 Green 公式，得$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\iint\limits_{D}f(xy)dxdy$。作变换 $u=xy,v=\frac{y}{x}$，则此变换将区域$\mathbf{D}$变为$D_{uv}=\{(u,v)|1\le u\le 4,1\le v\le 4\}$，变换的 Jacobi 行列式为$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2v}$，于是

$$\iint\limits_{D}f(xy)dxdy=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(u)}{2v}dudv=\int_1^4 f(u)du\int_1^4\frac{1}{2v}dv=\ln 2\int_1^4 f(u)du，$$

所以

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du\text{。}$$

15．证明：若 $\Sigma$ 为封闭曲面，$\boldsymbol{l}$ 为一固定向量，则

$$\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})dS=0\text{，}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 $\Sigma$ 的单位外法向量。

证　记 $\boldsymbol{l}=(a,b,c)$，而 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\frac{1}{\|\boldsymbol{l}\|}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)\text{，}$$

于是由 Gauss 公式，得到

$$\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})dS=\frac{1}{\|\boldsymbol{l}\|}\iint_{\Sigma}adydz+bdzdx+cdxdy=0\text{。}$$

16．设区域 $\Omega$ 由分片光滑封闭曲面 $\Sigma$ 所围成。证明：

$$\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{r}=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS\text{，}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 $\Sigma$ 的单位外法向量，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

证　由 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}=\dfrac{1}{r}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$，可知

$$\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS=\iint_{\Sigma}\frac{1}{r}(xdydz+ydzdx+zdxdy)\text{。}$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{y^2+z^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{x^2+z^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{x^2+y^2}{r^3},$$

由 Gauss 公式，得到

$$\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS=\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{r}\text{。}$$

17．设函数 $P(x,y,z),\ Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数。且对于任意光滑曲面 $\Sigma$，成立

$$\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0\text{。}$$

证明：在 $\mathbf{R}^3$ 上，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$。

证　用反证法。若存在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，使得 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\neq 0$，则不妨设 $\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}>0$。由于函数 $P(x,y,z),\ Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数，即 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 连续，所以存在 $r,c>0$，使得当

$$(x,y,z)\in\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2\right\}$$

时成立$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}>c>0$。

但另一方面，由 Gauss 公式，

$$\iint_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$\geq \iiint_{\Omega} cdxdydz=\frac{4}{3}\pi r^3 c>0\text{，}$$

这就与题设矛盾。

18．设**L**是平面$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$上的简单闭曲线，它所包围的区域**D**的面积为$S$，其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是平面取定方向上的单位向量。证明

$$S=\frac{1}{2}\int_{L}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}\text{，}$$

其中**L**的定向与平面的定向符合右手定则。

证　由 Stokes 公式，

$$\int_{L}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=\int_{L}(z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz$$

$$=\iint_{D}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\beta-y\cos\gamma & x\cos\gamma-z\cos\alpha & y\cos\alpha-x\cos\beta \end{vmatrix}dS$$

$$=2\iint_{D}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=2\iint_{D}dS=2S\text{，}$$

所以

$$S=\frac{1}{2}\int_{L}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}\text{。}$$

# 习 题 14.4 微分形式的外微分

1. 计算下列微分形式的外微分：

（1） 1-形式 $\omega = 2xydx + x^2dy$ ；

（2） 1-形式 $\omega = \cos ydx - \sin xdy$ ；

（3） 2-形式 $\omega = 6zdx \wedge dy - xydx \wedge dz$ 。

解 （1） $d\omega = 2ydx \wedge dx + 2xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = 0$ 。

（2） $d\omega = -\sin ydy \wedge dx - \cos xdx \wedge dy = (\sin y - \cos x)dx \wedge dy$。

（3） $d\omega = 6dz \wedge dx \wedge dy - xdy \wedge dx \wedge dz = (x+6)dx \wedge dy \wedge dz$ 。

2．设 $\omega = a_1(x_1)dx_1 + a_2(x_2)dx_2 + \cdots + a_n(x_n)dx_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-形式，求 $d\omega$。

解 $d\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i'(x_i)dx_i \wedge dx_i = 0$

3．设 $\omega = a_1(x_2,x_3)dx_2 \wedge dx_3 + a_2(x_1,x_3)dx_3 \wedge dx_1 + a_3(x_1,x_2)dx_1 \wedge dx_2$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的 2-形式，求 $d\omega$。

解 设 $\omega_1 = a_1(x_2,x_3)dx_2 \wedge dx_3$，由于

$$dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0,\ dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0\text{，}$$

则有

$$d\omega_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0\text{。}$$

类似地，设 $\omega_2 = a_2(x_1,x_3)dx_3 \wedge dx_1$， $\omega_3 = a_3(x_1,x_2)dx_1 \wedge dx_2$，则

$$d\omega_2 = d\omega_3 = 0\text{，}$$

从而

$$d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3 = 0\text{。}$$

4. 在 $\mathbf{R}^3$ 上在一个开区域 $\Omega = (a,b)\times(c,d)\times(e,f)$ 上定义了具有连续导数的函数 $a_1(z)$， $a_2(x)$， $a_3(y)$，试求形如

$$\omega = b_1(y)dx + b_2(z)dy + b_3(x)dz$$

的 1-形式 $\omega$，使得

$$d\omega = a_1(z)dy \wedge dz + a_2(x)dz \wedge dx + a_3(y)dx \wedge dy\text{。}$$

解 由题意，可得

$$b_1'(y) = -a_3(y),\ b_2'(z) = -a_1(z),\ b_3'(x) = -a_2(x)\text{，}$$

所以

$$\omega = -(\int a_3(y)dy)dx - (\int a_1(z)dz)dy - (\int a_2(x)dx)dz\text{。}$$

5. 设 $\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx_i \wedge dx_j$ （$a_{ij} = -a_{ji}$， $i,j = 1,2,\cdots,n$）是 $\mathbf{R}^n$ 上的 2-形式，证明

$$d\omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \text{。}$$

**证**　因为

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx_i \wedge dx_j = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}dx_j \wedge dx_k = \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}dx_k \wedge dx_i \text{，}$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_k \wedge dx_i \text{，} \end{aligned}$$

由于

$$dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j = dx_j \wedge dx_k \wedge dx_i = dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \text{，}$$

从而

$$d\omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \text{。}$$

# 习 题 14.5 场论初步

1．设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}$，对下列数量场 $f(x,y,z)$，分别计算 $\operatorname{grad} f$ 和 $\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})$：

（1）$f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$；

（2）$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$；

（3）$f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$。

解（1）$\operatorname{grad} f=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(3x+20y-15z)$。

（2）$\operatorname{grad} f=2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=2(3x+20y-15z)$。

（3）$\operatorname{grad} f=2(x^2+y^2+z^2)^{-1}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=2(x^2+y^2+z^2)^{-1}(3x+20y-15z)$。

2．求向量场 $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 穿过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的通量，其中球面在这一部分的定向为上侧。

解 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$，方向取上侧，则所求通量为

$$\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy，$$

由于 $\displaystyle\iint_{\Sigma} z^2dxdy=\iint_{\Sigma_{xy}}(1-x^2-y^2)dxdy=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{8}$，

同理可得 $\displaystyle\iint_{\Sigma} x^2dydz=\iint_{\Sigma} y^2dzdx=\frac{\pi}{8}$，

所以 $\displaystyle\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{3}{8}\pi$。

3．设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

（1）满足 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的函数 $f(r)$；

（2）满足 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]=0$ 的函数 $f(r)$。

解（1）经计算得到

$$\frac{\partial(f(r)x)}{\partial x}=f(r)+f'(r)\frac{x^2}{r}，$$

$$\frac{\partial(f(r)y)}{\partial y}=f(r)+f'(r)\frac{y^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)z)}{\partial z}=f(r)+f'(r)\frac{z^2}{r}，$$

所以

$$\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=3f(r)+rf'(r)。$$

由 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$，得 $3f(r)+rf'(r)=0$，解此微分方程，得到

$$f(r)=\frac{c}{r^3},$$

其中 $c$ 为任意常数。

（2）由 $\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r)$，$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r)$，$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r)$，得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}f'(r)\right)=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}f'(r)\right)=\frac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}f'(r)\right)=\frac{r^2-z^2}{r^3}f'(r)+\frac{z^2}{r^2}f''(r),$$

所以

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}\ f(r)]=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r)。$$

由 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}\ f(r)]=0$，得 $2f'(r)+rf''(r)=0$，解此微分方程，得到

$$f(r)=\frac{c_1}{r}+c_2,$$

其中 $c_1,c_2$ 为任意常数。

4. 计算

$$\operatorname{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是常矢量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，且 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}>0$。

解　设 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，$u=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=c_1+\frac{c_1}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},\frac{\partial u}{\partial y}=c_2+\frac{c_2}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},\frac{\partial u}{\partial z}=c_3+\frac{c_3}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},$$

所以

$$\operatorname{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}}。$$

5. 计算向量场 $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$ 沿下列定向曲线的环量：

（1）圆周 $(x-2)^2+(y-2)^2=1, z=0$，从 $z$ 轴正向看去为逆时针方向；

（2）圆周 $x^2+y^2=4, z=1$，从 $z$ 轴正向看去为顺时针方向。

解　经计算，可得

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}(-y,x,0),$$

$$\text{rot}\,\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=\mathbf{0}\text{，}$$

它在除去$z$轴的空间上是无旋场。

（1）设$L=\{(x,y,z)|\ (x-2)^2+(y-2)^2=1,z=0\}$，从$z$轴正向看去为逆时针方向；$\Sigma=\{(x,y,z)|\ (x-2)^2+(y-2)^2\le 1,z=0\}$，方向取上侧。由于$z$轴不穿过曲面$\Sigma$，根据 Stokes 公式，

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_\Sigma \text{rot}\,\boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\text{。}$$

（2）令$x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, z=0$，则

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\int_0^{2\pi} d\theta=-2\pi\text{。}$$

6. 计算向量场$\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点$M(1,3,2)$处的旋度，以及在这点沿方向$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$的环量面密度。

解 由

$$\text{rot}\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xyz & xyz & xyz\end{vmatrix}=x(z-y)\mathbf{i}+y(x-z)\mathbf{j}+z(y-x)\mathbf{k}\text{，}$$

可得

$$\text{rot}\,\boldsymbol{r}(M)=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}\text{。}$$

向量场$\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点$M(1,3,2)$沿方向$\boldsymbol{n}$的环量面密度为

$$\lim_{\Sigma\to M}\frac{1}{m(\Sigma)}\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\text{rot}\,\boldsymbol{r}(M)\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{1}{3}\text{。}$$

7. 设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$向量场，$f(x,y,z)$为数量场，证明：(假设函数$a_x,a_y,a_z$和$f$具有必要的连续偏导数)

（1）$\text{div}(\text{rot}\ \boldsymbol{a})=0$；

（2）$\text{rot}\,(\text{grad}\ f)=\mathbf{0}$；

（3）$\text{grad}(\text{div}\boldsymbol{a})-\text{rot}(\text{rot}\,\boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{a}$。

证（1） $$\text{rot}\mathbf{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\text{。}$$

设$a_x,a_y,a_z$二阶偏导数连续，则

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0\text{。}$$

（2） $$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ f)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\mathbf{0}\text{。}$$

（3）由

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{a})=\frac{\partial \mathrm{div}\boldsymbol{a}}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial \mathrm{div}\boldsymbol{a}}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial \mathrm{div}\boldsymbol{a}}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k}\text{，}$$

以及

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\text{，}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{k}\text{，}$$

得到

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{a})-\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})=\Delta a_x\boldsymbol{i}+\Delta a_y\boldsymbol{j}+\Delta a_z\boldsymbol{k}=\Delta\boldsymbol{a}\text{。}$$

8. 位于原点的点电荷 $q$ 产生的静电场的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， $\varepsilon_0$ 为真空介电常数。求 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$。

解

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)=-\frac{3yz}{r^4}+\frac{3yz}{r^4}=0\text{，}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{3zx}{r^4}+\frac{3zx}{r^4}=0\text{，}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{3xy}{r^4}+\frac{3xy}{r^4}=0\text{，}$$

所以

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E}=\mathbf{0},\quad (x,y,z)\neq\mathbf{0}\text{。}$$

9. 设$\boldsymbol{a}$为常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，验证：

(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$；

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$；

(3) $\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$。

**证** (1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$

$$=\frac{\partial(a_y z-a_z y)}{\partial x}+\frac{\partial(a_z x-a_x z)}{\partial y}+\frac{\partial(a_x y-a_y x)}{\partial z}=0\text{。}$$

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_y z-a_z y & a_z x-a_x z & a_x y-a_y x\end{vmatrix}$

$$=2(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{a}\text{。}$$

(3) $\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=\frac{\partial(a_x x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(a_y y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(a_z z^2)}{\partial z}=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$。

10. 求全微分$(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$的原函数。

**解** 记 $\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$，由于

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=-2x=\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}=-2y=\frac{\partial a_z}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial x}=-2z=\frac{\partial a_x}{\partial y}\text{，}$$

所以向量场$\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$是一个无旋场，其原函数为

$$U(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz+C$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-2xy)dz=\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)-2xyz+C\text{。}$$

11.证明向量场$\boldsymbol{a}=\frac{x-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{x+y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}\quad(x>0)$是有势场并求势函数。

**证** 当$x>0$时，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)\text{，}$$

所以向量场$\boldsymbol{a}$是有势场，其势函数为

$$V(x,y)=-U(x,y)=-\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}+C$$

$$=-\int_1^x\frac{dx}{x}-\int_0^y\frac{x+y}{x^2+y^2}dy+C=-\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C\text{。}$$

12.证明向量场$\boldsymbol{a}=(2x+y+z)yz\boldsymbol{i}+(x+2y+z)zx\boldsymbol{j}+(x+y+2z)xy\boldsymbol{k}$是有势场，

并求出它的势函数。

证 设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=x^2+2x(y+z)=\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}=y^2+2y(x+z)=\frac{\partial a_z}{\partial x}\text{，}$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=z^2+2z(x+y)=\frac{\partial a_x}{\partial y}\text{，}$$

所以向量场$\boldsymbol{a}$是有势场。设原函数为$U=U(x,y,z)$，则

$$\begin{aligned}dU&=(2x+y+z)yzdx+(x+2y+z)zxdy+(x+y+2z)xydz\\&=[yzdx^2+x^2(zdy+ydz)]+[y^2(zdx+xdz)+zxdy^2]\\&+[z^2(ydx+xdy)+xydz^2]\\&=d(x^2yz)+d(xy^2z)+d(xyz^2)=d[xyz(x+y+z)]\text{，}\end{aligned}$$

所以势函数为

$$V(x,y,z)=-U(x,y,z)=-xyz(x+y+z)+C\text{。}$$

13.验证：

（1） $u=y^3-3x^2y$ 为平面$\mathbf{R}^2$上的调和函数；

（2） $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 为$\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$上的调和函数；

（3） $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为$\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$上的调和函数。

解（1）因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y\text{，}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\text{，}$$

即$u=y^3-3x^2y$为平面$\mathbf{R}^2$上的调和函数。

（2）因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}\text{，}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\text{，}$$

即$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$为$\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$上的调和函数。

（3）记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}\text{，}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x^2}{r^5}\text{，}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}=-\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{y}{r^4}\frac{y}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{y^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}=-\frac{z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{z}{r^4}\frac{z}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{z^2}{r^5}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}=0,$$

即$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$为$\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$上的调和函数。

14.设$u(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上具有二阶连续偏导数，证明$u$是调和函数的充要条件为：对于$\mathbf{R}^2$中任意光滑封闭曲线$C$，成立$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds=0$，$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿$C$的外法线方向的方向导数。

证 必要性。设$C$是$\mathbf{R}^2$中任意光滑封闭曲线，由

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\tau,y)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\tau,x),$$

其中$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{\tau}$分别是曲线$C$上点$(x,y)$处的单位外法向和单位切向，得到

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_C \frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx。$$

由 green 公式，得到

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=0。$$

充分性。如果存在点$M_0(x_0,y_0)$，使得 $\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}\neq 0$，不妨设其大于零。由于$u(x,y)$具有二阶连续偏导数，所以存在$\delta>0$，使得在$D=O(M_0,\delta)$上，成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0,$$

于是

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy>0,$$

与条件矛盾，所以$u$是调和函数。

15.设$u=u(x,y)$与$v=v(x,y)$都为平面上的调和函数。令$F=\sqrt{u^2+v^2}$。证明当$p\geq 2$时，在$F\neq 0$的点成立

$$\Delta(F^p)\geq 0。$$

证 由

$$\frac{\partial F^p}{\partial x}=pF^{p-1}\frac{uu_x+vv_x}{F}=pF^{p-2}(uu_x+vv_x)$$

和

$$\frac{\partial F^p}{\partial y}=pF^{p-1}\frac{uu_y+vv_y}{F}=pF^{p-2}(uu_y+vv_y)\text{，}$$

得到

$$\frac{\partial^2(F^p)}{\partial x^2}=p(p-2)F^{p-4}(uu_x+vv_x)^2+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx})$$

和

$$\frac{\partial^2(F^p)}{\partial y^2}=p(p-2)F^{p-4}(uu_y+vv_y)^2+pF^{p-2}(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy})\text{，}$$

所以

$$\Delta(F^p)=$$

$$p(p-2)F^{p-4}[(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2]+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2)\ge 0\text{。}$$

16.设$\mathbf{B}=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，$\mathbf{F}(x,y,z)$：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$为具有连续导数的向量值函数，且满足

$$\mathbf{F}\big|_{\partial\mathbf{B}}\equiv(0,0,0)\text{，}\quad \nabla\cdot\mathbf{F}\big|_{\mathbf{B}}\equiv 0\text{。}$$

证明：对于任何$\mathbf{R}^3$上具有连续偏导数的函数$g(x,y,z)$成立

$$\iiint\limits_{\mathbf{B}}\nabla g\cdot\mathbf{F}dxdydz=0\text{。}$$

证 由$\nabla\cdot(g\mathbf{F})=\nabla g\cdot\mathbf{F}+g\nabla\cdot\mathbf{F}$及 Gauss 公式，得到

$$\iiint\limits_{\mathbf{B}}\nabla g\cdot\mathbf{F}dxdydz=\iiint\limits_{\mathbf{B}}\nabla\cdot(g\mathbf{F})dxdydz-\iiint\limits_{\mathbf{B}}g\nabla\cdot\mathbf{F}dxdydz$$

$$=\iint\limits_{\partial\mathbf{B}}g\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}-\iiint\limits_{\mathbf{B}}g\nabla\cdot\mathbf{F}dxdydz=0\text{，}$$

最后一个等式利用了条件 $\mathbf{F}\big|_{\partial\mathbf{B}}\equiv(0,0,0)$，$\nabla\cdot\mathbf{F}\big|_{\mathbf{B}}\equiv 0$。

17.设$\mathbf{D}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$，$u(x,y)$在$\overline{\mathbf{D}}$上具有连续二阶偏导数。进一步，设$u$在$\overline{\mathbf{D}}$上不恒等于零，但在$\mathbf{D}$的边界$\partial\mathbf{D}$上恒为零，且在$\mathbf{D}$上成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u \qquad（\lambda\text{ 为常数}）。$$

证明

$$\iint\limits_{\mathbf{D}}\|\mathrm{grad}\,u\|^2dxdy+\lambda\iint\limits_{\mathbf{D}}u^2dxdy=0\text{。}$$

证 由 green 公式，

$$\int\limits_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}dx+u\frac{\partial u}{\partial x}dy=\iint\limits_{D}\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\right]dxdy\text{。}$$

由于在$\partial\mathbf{D}$上$u(x,y)$恒为零，所以$\int\limits_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}dx+u\frac{\partial u}{\partial x}dy=0$，另一方面，在$\mathbf{D}$

上成立 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u$，所以

$$\iint_D\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+\lambda u^2\right]dxdy=0，$$

即

$$\iint_{\mathbf{D}}\|\text{grad}\,u\|^2dxdy+\lambda\iint_{\mathbf{D}}u^2dxdy=0。$$

18.设区域$\Omega$由分片光滑封闭曲面$\Sigma$所围成，$u(x,y,z)$在$\overline{\Omega}$上具有二阶连续偏导数，且在$\overline{\Omega}$上调和，即满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

（1）证明

$$\iint_\Sigma\frac{\partial u}{\partial n}dS=0，$$

其中$\boldsymbol{n}$为$\Sigma$的单位外法向量；

（2）设$(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$为一定点，证明

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS，$$

其中$\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$r=|\boldsymbol{r}|$。

证（1）设$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由方向导数的计算公式及 Gauss 公式，得到

$$\iint_\Sigma\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iint_\Sigma(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS$$

$$=\iiint_\Omega(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})dxdydz=0。$$

（2）由于$\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}$，$\frac{\partial u}{\partial n}=(\text{grad}\,u)\cdot\boldsymbol{n}$，于是

$$\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\left(u\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy，$$

其中$P=\frac{(x-x_0)u+r^2u_x}{r^3}$，$Q=\frac{(y-y_0)u+r^2u_y}{r^3}$，$R=\frac{(z-z_0)u+r^2u_z}{r^3}$。

经计算得到

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(x-x_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{xx}}{r}，$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(y-y_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{yy}}{r}，$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(z-z_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{zz}}{r}\text{，}$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\text{。}$$

现在取一个以$(x_0,y_0,z_0)$为中心，$\delta>0$为半径的球面$S_0$，使得$S_0\subset\Omega$，并设$n$为$S_0$的单位外法向量，然后在$\Sigma$与$S_0$所围的区域$\Omega'$上应用 Gauss 公式，得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma+(-S_0)}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega'}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=0\text{，}$$

从而

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_0}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\text{。}$$

注意$r=\delta$为常数，$\cos(\boldsymbol{r},n)=1$与$\iint\limits_{S_0}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$，则

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint\limits_{S_0}u(x,y,z)dS\text{，}$$

利用积分中值定理并令$\delta\to 0$，即得

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\text{。}$$

# 第十五章　含参变量积分

## 习　题　15.1　含参变量的常义积分

1．　求下列极限：

（1） $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ ；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ 。

解（1）由积分中值定理，可得

$$\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}+\int_1^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2}\quad（\xi\text{在}1\text{与}1+\alpha\text{之间}），$$

于是

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}。$$

（2）由连续性定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=-\int_0^1\frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}=\ln\frac{2e}{1+e}。$$

2．设 $f(x,y)$ 当 $y$ 固定时，关于 $x$ 在 $[a,b]$ 上连续，且当 $y\to y_0-$ 时，它关于 $y$ 单调增加地趋于连续函数 $\phi(x)$，证明

$$\lim_{y\to y_0-}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\phi(x)dx。$$

证 若能证明 $\lim\limits_{y\to y_0-}f(x,y)=\phi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall y\in(y_0-\delta,y_0)$，$\forall x\in[a,b]$：$|f(x,y)-\phi(x)|<\varepsilon$，则

$$\left|\int_a^b(f(x,y)-\phi(x))dx\right|\le\int_a^b|f(x,y)-\phi(x)|dx<(b-a)\varepsilon，$$

就有

$$\lim_{y\to y_0-}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\phi(x)dx。$$

以下用反证法证明 $\lim\limits_{y\to y_0-}f(x,y)=\phi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的。

若不然，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists y\in(y_0-\delta,y_0)$，$\exists x\in[a,b]$：

$$\left|f(x,y)-\phi(x)\right|\ge\varepsilon_0。$$

依次取$\delta_1=1$，$\exists y_1\in(y_0-\delta_1,y_0)$，$\exists x_1\in[a,b]$：$\left|f(x_1,y_1)-\phi(x_1)\right|\ge\varepsilon_0$；

$\delta_2=\min\left\{\frac{1}{2},y_0-y_1\right\}$，$\exists y_2\in(y_0-\delta_2,y_0)$，$\exists x_2\in[a,b]$，$\left|f(x_2,y_2)-\phi(x_2)\right|\ge\varepsilon_0$；

$$\cdots\cdots$$

$\delta_n=\min\left\{\frac{1}{n},y_0-y_{n-1}\right\}$，$\exists y_n\in(y_0-\delta_n,y_0)$，$\exists x_n\in[a,b]$，$\left|f(x_n,y_n)-\phi(x_n)\right|\ge\varepsilon_0$；

$$\cdots\cdots。$$

由此得到两列数列$\{x_n\},\{y_n\}$。由于$\{x_n\},\{y_n\}$有界，由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在收敛子列$\{x_{n_k}\},\{y_{n_k}\}$，为叙述方便，仍记这两个子列为$\{x_n\},\{y_n\}$，其中$\{y_n\}$是递增的，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

由 $f(\xi,y)\to\phi(\xi)\,(y\to y_0-)$，可知$\exists\delta>0,\ \forall y(-\delta<y-y_0<0)$：

$$\left|f(\xi,y)-\phi(\xi)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

注意$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$，取足够大的$K$使得$-\delta<y_K-y_0<0$，从而

$$\left|f(\xi,y_K)-\phi(\xi)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

又 $f(x,y_K)-\phi(x)$ 在 $x=\xi$ 点连续以及$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，$\exists N>0,$ 当 $n>N$ 时，成立

$$\left|\left(f(x_n,y_K)-\phi(x_n)\right)-\left(f(\xi,y_K)-\phi(\xi)\right)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

于是

$$\left|f(x_n,y_K)-\phi(x_n)\right|<\varepsilon_0。$$

但是对固定的$x_n$，当$y\to y_0-$时，$f(x_n,y)$关于$y$单调递增地趋于$\phi(x_n)$，所以当$n>\max\{N,K\}$时，成立

$$\left|f(x_n,y_n)-\phi(x_n)\right|\le\left|f(x_n,y_K)-\phi(x_n)\right|<\varepsilon_0,$$

这与 $\left|f(x_n,y_n)-\phi(x_n)\right|\ge\varepsilon_0$，$(n=1,2,\cdots)$矛盾。

3. 用交换积分顺序的方法计算下列积分：

（1） $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(b>a>0)$；

（2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}\quad(1>a>0)$。

解（1） $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$，

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{y+1}x^{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1+\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{(y+1)^2}x^{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx，$$

于是

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{1+(y+1)^2}，$$

所以

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b\frac{dy}{1+(y+1)^2}=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)。$$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^a\frac{dy}{1-y^2\sin^2 x}=2\int_0^a dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-y^2\sin^2 x}$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-y^2\sin^2 x}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cot x}{\cot^2 x+1-y^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{\cot x}{\sqrt{1-y^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1-y^2}}，$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}=\pi\int_0^a\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin a。$$

4. 求下列函数的导数：

（1）$I(y)=\int_y^{y^2}e^{-x^2y}dx$；

（2）$I(y)=\int_y^{y^2}\frac{\cos xy}{x}dx$；

（3）$F(t)=\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$。

解（1）$I'(y)=2ye^{-y^5}-e^{-y^3}-\int_y^{y^2}x^2e^{-x^2y}dx$。

（2）$I'(y)=\frac{2\cos y^3-\cos y^2}{y}-\int_y^{y^2}\sin(xy)dx=\frac{3\cos y^3-2\cos y^2}{y}$。

（3）设 $g(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$，则

$$g_t(x,t)=-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy+\sin(2x^2+2xt)+\sin(2x^2-2xt)，$$

所以

$$F'(t)=\int_0^{t^2}g_t(x,t)dx+2tg(t^2,t)$$

$$=-2t\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy+2\int_0^{t^2}\sin 2x^2\cos 2xtdx$$

$$+2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4-t^2+y^2)dy\text{。}$$

5. 设$I(y)=\int_0^y (x+y)f(x)dx$，其中$f$为可微函数，求$I''(y)$。

解 $I'(y)=2yf(y)+\int_0^y f(x)dx$，

$I''(y)=3f(y)+2yf'(y)$。

6. 设$F(y)=\int_a^b f(x)|y-x|dx \quad (a<b)$，其中$f(x)$为可微函数，求$F''(y)$。

解 当$y\le a$时，$F(y)=\int_a^b f(x)(x-y)dx$，于是

$$F'(y)=-\int_a^b f(x)dx,\quad F''(y)=0\text{；}$$

当$y\ge b$时，$F(y)=\int_a^b f(x)(y-x)dx$，于是

$$F'(y)=\int_a^b f(x)dx,\quad F''(y)=0\text{；}$$

当$a<y<b$时，$F(y)=\int_a^y f(x)(y-x)dx+\int_y^b f(x)(x-y)dx$，于是

$$F'(y)=\int_a^y f(x)dx-\int_y^b f(x)dx,\quad F''(y)=2f(y)\text{。}$$

7. 设函数$f(x)$具有二阶导数，$F(x)$是可导的，证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)dy$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{，}$$

以及初始条件$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$。

证 直接计算，可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[-af'(x-at)+af'(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left[aF(x+at)+aF(x-at)\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}\left[f''(x-at)+f''(x+at)\right]+\frac{a}{2}\left[F'(x+at)-F'(x-at)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[f'(x-at)+f'(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left[F(x+at)-F(x-at)\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left[f''(x-at)+f''(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left[F'(x+at)-F'(x-at)\right],$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{，}$$

且显然成立 $u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$。

8．利用积分号下求导法计算下列积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)dx \quad (a > 1)$；

（2）$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx \quad (|\alpha| < 1)$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx$。

解（1）设 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)dx$，则

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2\cot^2 x + a^2 - 1}d\cot x$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{a\cot x}{\sqrt{a^2-1}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

于是

$$I(a) = \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + C。$$

令 $a \to 1+$，则

$$C = I(1) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx = -\pi\ln 2,$$

所以

$$I(a) = \pi\ln\frac{a + \sqrt{a^2-1}}{2}。$$

（2）设 $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx$，则 $I(0) = 0$。设 $\alpha \neq 0$，由于

$$I'(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{2\alpha - 2\cos x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}dx,$$

作变换 $t = \tan\frac{x}{2}$，得到

$$I'(\alpha) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\alpha - 1 + (\alpha+1)t^2}{[(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2 t^2](1+t^2)}dt$$
$$= \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} + 2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2 t^2}$$
$$= \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} - \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}t\right)}{1+\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 t^2} = 0,$$

所以 $I(\alpha) = C$，再由 $I(0) = 0$，得到

$$I(\alpha) = 0 \quad (|\alpha| < 1)。$$

（3）设 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx$，且不妨设 $a > 0$，$b > 0$。

当 $a = b$ 时，$I(a) = \pi\ln|a|$。以下设 $a \neq b$。

由于

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx,$$

记

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx,\quad B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx,$$

则

$$a^2A+b^2B=\frac{\pi}{2},$$

$$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2ab}。$$

由此解得

$$A=\frac{\pi}{2}\frac{1}{a(a+b)},$$

于是

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b},$$

积分后得到

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+C。$$

由$I(0)=\pi\ln\frac{b}{2}$，得到$C=-\pi\ln 2$，从而 $I(a)=\pi\ln\frac{a+b}{2}$，或者一般地有

$$I(a)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}。$$

9．证明：第二类椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad (0<k<1)$$

满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0。$$

证 直接计算，有

$$E'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-k\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt,$$

$$E''(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^4 t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{k^2\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{k^2(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt,$$

于是

$$E''(k)=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}d\sin t$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t d\frac{\sin t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt\text{，}$$

所以

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 tdt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(k^2-1)\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt+\frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt+\frac{E(k)}{1-k^2}=0\text{。}$$

10．设函数 $f(u,v)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数。证明：函数

$$w(x,y,z)=\int_0^{2\pi}f(x+z\cos\varphi,\ y+z\sin\varphi)d\varphi$$

满足偏微分方程

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}\text{。}$$

证　由直接计算，可得

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\int_0^{2\pi}f_u d\varphi\text{，}\quad\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\int_0^{2\pi}f_{uu}d\varphi\text{，}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\int_0^{2\pi}f_v d\varphi\text{，}\quad\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\int_0^{2\pi}f_{vv}d\varphi\text{，}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\int_0^{2\pi}(f_u\cos\varphi+f_v\sin\varphi)d\varphi\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\int_0^{2\pi}(f_{uu}\cos^2\varphi+f_{uv}\sin 2\varphi+f_{vv}\sin^2\varphi)d\varphi\text{，}$$

于是

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=z\int_0^{2\pi}(f_{uu}\sin^2\varphi-f_{uv}\sin 2\varphi+f_{vv}\cos^2\varphi)d\varphi\text{。}$$

另一方面，由分部积分可得

$$\int_0^{2\pi}f_u\cos\varphi d\varphi=-\int_0^{2\pi}[f_{uu}(-z\sin\varphi)+f_{uv}z\cos\varphi]\sin\varphi d\varphi\text{，}$$

$$\int_0^{2\pi}f_v\sin\varphi d\varphi=\int_0^{2\pi}[f_{vu}(-z\sin\varphi)+f_{vv}z\cos\varphi]\cos\varphi d\varphi\text{，}$$

所以

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}。$$

11．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$。研究函数

$$I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

的连续性。

解　设 $y_0\neq 0$，由于 $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 在 $[0,1]\times[y_0-\frac{|y_0|}{2},y_0+\frac{|y_0|}{2}]$ 上连续，可知 $I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 在 $y_0\neq 0$ 处连续。

设 $y_0=0$，则 $I(y_0)=I(0)=0$。由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $m>0$，当 $y>0$ 时，成立 $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\geq\frac{my}{x^2+y^2}$，于是

$$I(y)\geq m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx=m\arctan\frac{1}{y},$$

由 $\lim\limits_{y\to 0+}(m\arctan\frac{1}{y})=\frac{m\pi}{2}>0$，可知 $\lim\limits_{y\to 0+}I(y)\neq 0=I(0)$，即 $I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 在 $y_0=0$ 处不连续。

注　在本题中可证明 $\lim\limits_{y\to 0+}I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0-}I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$，其中 $f(0)\neq 0$，由此也说明了 $I(y)$ 在 $y=0$ 点不连续。证明如下：

$\forall\varepsilon>0$，取 $\eta>0$，使得当 $0<x<\eta$ 时，$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$，则

$$|\int_0^\eta \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx-\int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

对固定的 $\eta>0$，取 $\delta>0$，使得当 $0<|y|<\delta$ 时，$|\int_\eta^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx-\int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx|<\varepsilon。$$

分别令 $y\to 0+$ 与 $y\to 0-$，由

$$\lim_{y\to 0+}\int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx=\frac{\pi}{2}f(0)，\quad \lim_{y\to 0-}\int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx=-\frac{\pi}{2}f(0)$$

和$\varepsilon$的任意性，即可得到$\lim\limits_{y\to 0+} I(y)=\dfrac{\pi}{2}f(0)$与$\lim\limits_{y\to 0-} I(y)=-\dfrac{\pi}{2}f(0)$。

# 习　题　15.2　含参变量的反常积分

1.　证明下列含参变量反常积分在指定区间上一致收敛：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$，$y\ge a>0$；　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx$，$0\le\alpha\le\alpha_0$；

（3）$\int_0^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha x dx$，$a\le\alpha\le b$。

解　（1）因为 $\left|\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{x^2+a^2}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx$ 收敛，所以由 Weierstrass 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛。

（2）$\left|\int_0^A\sin 2x dx\right|\le 1$，即 $\int_0^A\sin 2x dx$ 关于 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 一致有界；$\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 $x$ 单调，且由 $\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}\right|\le\frac{1}{x}$，可知当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 一致趋于零。于是由 Dirichlet 判别法，可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx$ 在 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 上一致收敛。

（3）由分部积分法，

$$\int_A^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha x dx=-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2}d\cos x^4$$

$$=-\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{4x^2}\bigg|_A^{+\infty}-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}dx,$$

其中

$$\left|\frac{\cos\alpha x\cos x}{x^2}\bigg|_A^{+\infty}\right|\le\frac{1}{A^2};$$

再由 $\left|\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}\right|\le\frac{\max(|a|,|b|)}{x^2}$ 及 $\left|\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3}$，可得到

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}dx\right|\le\max(|a|,|b|)\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{\max(|a|,|b|)}{A}$$

与

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}dx\right|\le\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2A^2}。$$

当 $A\to+\infty$ 时，上述三式关于 $\alpha$ 在 $[a,b]$ 上一致趋于零，所以原积分关于 $\alpha$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

2．说明下列含参变量反常积分在指定区间上非一致收敛：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$，$0<\alpha<+\infty$；　　（2）$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$，$0<\alpha<2$。

解（1）取$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{18}>0$，$\forall A_0>0$，取$A'=\frac{n\pi}{4}>A_0, A''=\frac{3n\pi}{4}$，$\alpha=\alpha_n=\frac{1}{n}$，

则当$n$充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx\right|=\int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}}\frac{x\sin\alpha_n x}{\alpha_n(1+x^2)}dx\geq\frac{\sqrt{2}n^2\pi^2}{16\left(1+(\frac{3n\pi}{4})^2\right)}>\frac{\sqrt{2}}{18}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$在$\alpha\in(0,+\infty)$上不一致收敛。

（2）作变量代换$x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin t dt。$$

取$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi>0$，$\forall A_0>0$，取$A'=2n\pi+\frac{\pi}{4}>A_0, A''=2n\pi+\frac{3\pi}{4}$，$\alpha=\alpha_n=2-\frac{1}{n}$，则当$n$充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin t dt\right|=\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{t^{2-\alpha_n}}\sin t dt\geq\frac{\sqrt{2}\pi}{4\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{1}{n}}}>\frac{\sqrt{2}}{8}\pi=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$在$\alpha\in(0,2)$上不一致收敛。

3．设$f(t)$在$t>0$上连续，反常积分$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$当$\lambda=a$与$\lambda=b$时都收敛，证明$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛。

证　将反常积分$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$写成

$$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt=\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]dt+\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^b f(t)]dt。$$

对于$\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]dt$，因为$\int_0^1 t^a f(t)dt$收敛从而关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛，$t^{\lambda-a}$是$t$的单调函数，且$\left|t^{\lambda-a}\right|\leq 1$，即$t^{\lambda-a}$在$t\in[0,1]$上关于$\lambda\in[a,b]$一致有界，由 Abel 判别法，可知$\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]dt$关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛。

对于$\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^b f(t)]dt$，因为$\int_1^{+\infty}t^b f(t)dt$收敛从而关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛，$t^{\lambda-b}$是$t$的单调函数，且$\left|t^{\lambda-b}\right|\leq 1$，即$t^{\lambda-b}$在$t\in[1,+\infty)$上关于

$\lambda\in[a,b]$一致有界，由 Abel 判别法，可知$\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^b f(t)]dt$关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛。

所以$\int_0^{+\infty}t^{\lambda}f(t)dt$关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛。

4. 讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，在$y\ge y_0>0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，在（I）$a<\alpha<b$；（II）$-\infty<\alpha<+\infty$；

（3）$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$，在（I）$p\ge p_0>0$；（II）$p>0$；

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx$，在（I）$\alpha\ge\alpha_0>0$；（II）$\alpha>0$；

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，

对于$\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，由于$\left|\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}$，$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，可知$\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$关于$y$一致收敛。

对于$\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，由于$\left|\int_1^A\cos xydx\right|\le\frac{2}{y_0}$，即$\int_1^A\cos xydx$关于$y\in[y_0,+\infty)$一致有界，以及$\frac{1}{\sqrt{x}}$单调，当$x\to+\infty$时，$\frac{1}{\sqrt{x}}$关于$y\in[y_0,+\infty)$一致趋于零，由 Dirichlet 判别法，可知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$关于$y\in[y_0,+\infty)$一致收敛，

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$关于$y\in[y_0,+\infty)$一致收敛。

（2）（I）当$a<\alpha<b$，取$A>0$，使$(a,b)\subset[-A,A]$。则$\forall|x|\ge A$，$\left|e^{-(x-\alpha)^2}\right|\le e^{-(|x|-A)^2}$，而$\int_{-\infty}^{-A}e^{-(|x|-A)^2}dx$与$\int_A^{+\infty}e^{-(|x|-A)^2}dx$收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分$\int_{-\infty}^0 e^{-(x-\alpha)^2}dx$与$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$\alpha\in(a,b)$上一致收敛。所以$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$\alpha\in(a,b)$上一致收敛。

（II）当$-\infty<\alpha<+\infty$，对于$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，取$\varepsilon_0=\frac{1}{e}>0$，$\forall A_0>0$，取$A'=n>A_0, A''=n+1$，$\alpha=\alpha_n=n$，则当$n$充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}e^{-(x-\alpha)^2}dx\right|=\int_n^{n+1}e^{-(x-\alpha_n)^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx>\frac{1}{e}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$\alpha\in(-\infty,+\infty)$上不一致收敛。同理$\int_{-\infty}^0 e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$\alpha\in(-\infty,+\infty)$上也不一致收敛。所以$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在

$\alpha \in (-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛。

（3）（I）当 $p \ge p_0 > 0$，$\left|x^{p-1}\ln^2 x\right| \le x^{p_0-1}\ln^2 x$，而 $\int_0^1 x^{p_0-1}\ln^2 xdx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$ 在 $p \in [p_0,+\infty)$ 上一致收敛。

（II）当 $p > 0$，取 $p_n = \dfrac{1}{n} > 0$，由于

$$\left|\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x^{p_n-1}\ln^2 xdx\right| \ge \ln^2\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}-1}dx = n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\right)\ln^2\frac{1}{n} \to +\infty(p \to +0),$$

由 Cauchy 收敛准则，可知 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$ 在 $p \in (0,+\infty)$ 上不一致收敛。

（4）（I）当 $\alpha \ge \alpha_0 > 0$，$\left|e^{-\alpha x}\sin x\right| \le e^{-\alpha_0 x}$ $(x \ge 0)$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin xdx$ 在 $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛。

（II）当 $\alpha > 0$，取 $\varepsilon_0 = 2e^{-\pi}$，$\forall A > 0$，取 $A' = n\pi > A, A'' = (n+1)\pi$，$\alpha = \alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$，则当 $n$ 充分大时，

$$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\alpha_n x}\sin xdx\right| \ge 2e^{-\pi} = \varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin xdx$ 在 $\alpha \in (0,+\infty)$ 上不一致收敛。

5. 证明函数 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

**证** 任取 $[a,b] \subset (0,+\infty)$，$\left|\int_1^A \cos xdx\right| \le 2$，即 $\int_1^A \cos xdx$ 关于 $\alpha \in [a,b]$ 一致有界；$\dfrac{1}{x^\alpha}$ 关于 $x$ 单调，且 $\forall\alpha \in [a,b]$ 成立 $\dfrac{1}{x^\alpha} \le \dfrac{1}{x^a}$，所以当 $x \to +\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^\alpha}$ 关于 $\alpha \in [a,b]$ 一致趋于零。由 Dirichlet 判别法，可知 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $\alpha \in [a,b]$ 上一致收敛，从而 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $[a,b]$ 上连续，由 $a,b$ 的任意性，即知 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

6. 确定函数 $F(y) = \int_0^\pi \dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 的连续范围。

**解** 函数 $F(y) = \int_0^\pi \dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 的定义域为 $(0,2)$。下面我们证明 $F(y) = \int_0^\pi \dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 在 $(0,2)$ 上内闭一致收敛，即 $\forall\eta > 0$，$F(y) = \int_0^\pi \dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 在 $y \in [\eta,2-\eta]$ 上一致收敛，从而得到 $F(y)$ 在 $(0,2)$ 上的连续性。

由于积分有两个奇点，所以将 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 写成

$F(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx=F_1(y)+F_2(y)$。

当 $x\in(0,1)$，$y\le 2-\eta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\right|\le\frac{\sin x}{x^{2-\eta}}$，而 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{2-\eta}}dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $F_1(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

当 $x\in(\pi-1,\pi)$，$y\ge\eta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\right|\le\frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}}$，而 $\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}}dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $F_2(y)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

所以 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

7. 设 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 存在。证明 $f(x)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

证 由于 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛即关于 $s$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，$e^{-sx}$ 关于 $x$ 单调，且 $\left|e^{-sx}\right|\le 1$，即 $e^{-sx}$ 在 $x\in[0,+\infty),s\in[0,+\infty)$ 上一致有界，由 Abel 判别法，$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 在 $s\in[0,+\infty)$ 上一致收敛，从而 $F(s)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

8. 证明函数 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微。

证 首先反常积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 对任意 $t\in(-\infty,+\infty)$ 收敛。其次有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\right]dx=-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)}{\left[1+(x+t)^2\right]^2}\cos xdx。$$

任取 $[a,b]$，$\forall A>0$，$\left|\int_0^A\cos xdx\right|\le 2$，即 $\int_0^A\cos xdx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致有界；记 $c=\max\{|a|,|b|\}$，当 $x>c$，$t\in[a,b]$ 时，$\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 $x$ 单调，且 $\left|\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\right|\le\frac{1}{1+(x-c)^2}$，即当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致趋于零。由 Dirichlet 判别法，可知 $-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\cos xdx$ 在 $t\in[a,b]$ 上一致收敛，所以 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $t\in[a,b]$ 上可微，且有

$$I'(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)\cos x}{[1+(x+t)^2]^2}dx。$$

由$a,b$的任意性，即知$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$在$(-\infty,+\infty)$上可微。

9. 利用$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$，计算$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$　（$b>a>0$）。

解　当$y\in[a,b]$时，$\left|e^{-xy}\right|\le e^{-ax}$，而$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$收敛，所以$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$关于$y\in[a,b]$一致收敛，由积分次序交换定理，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}。$$

10．利用$\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xydy$，计算$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx$　（$p>0$，$b>a>0$）。

解　当$y\in[a,b]$时，$\left|\int_0^A\cos xydx\right|\le\frac{2}{a}$，即$\int_0^A\cos xydx$关于$y\in[a,b]$一致有界；$e^{-px}$关于$x$单调，且当$x\to+\infty$时，$e^{-px}$关于$y$一致趋于零。由 Dirichlet 判别法，$\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos xydx$关于$y\in[a,b]$一致收敛，由积分次序交换定理，

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-px}dx\int_a^b\cos(xy)dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos(xy)dx。$$

利用分部积分，

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos(xy)dx=\frac{p}{p^2+y^2}，$$

于是

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}dy=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}。$$

11．利用$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$　（$a>0$），计算$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$　（$n$为正整数）。

解　由于$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}$对一切$a\in(0,+\infty)$收敛，$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{-dx}{\left(a+x^2\right)^2}$关于$a$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，因此$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}$在$a\in(0,+\infty)$上可微且成立

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^2}，$$

所以

$$I_2=-\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)。$$

同理上述积分仍可在积分号下求导，并可不断进行下去。由

$$\frac{d^n}{da^n}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}a^{-\frac{1}{2}-n}$$

与

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{(a+x^2)^{n+1}}，$$

即可得到

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}a^{-\frac{2n+1}{2}}\pi。$$

12．计算 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$。

解 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\arctan\alpha x d\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\int_1^{+\infty}\frac{\alpha\sqrt{x^2-1}}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$。

在最后一个积分中，令 $t=\sqrt{x^2-1}$，则

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\int_0^{+\infty}\frac{\alpha t^2}{(1+t^2)(1+\alpha^2+\alpha^2x^2)}dt\\&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\alpha\int_0^{+\infty}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left[|\alpha|+1-\sqrt{1+\alpha^2}\right]。\end{aligned}$$

13．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad（a,b>0）。$$

证 设 $A''>A'>0$，

$$\begin{aligned}&\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{A'}^{A''}\frac{f(bx)}{x}dx\\&=\int_{aA'}^{aA''}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{bA'}^{bA''}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{aA'}^{bA'}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{aA''}^{bA''}\frac{f(bx)}{x}dx\\&=[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\ln\frac{b}{a}，\end{aligned}$$

最后一个等式利用了积分中值定理，其中 $\xi_1$ 在 $aA'$ 与 $bA'$ 之间，$\xi_2$ 在 $aA''$ 与 $bA''$ 之间。令 $A'\to+0$，$A''\to+\infty$，则 $\xi_1\to0,\xi_2\to+\infty$，由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}。$$

14．（1）利用 $\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 推出 $L(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}$ （$c>0$）；

（2）利用积分号下求导的方法引出$\frac{dL}{dc}=-2L$，以此推出与（1）同样的结果，并计算$\int_0^{+\infty}e^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}dy$ （$a>0, b>0$）。

解（1）令$y=\frac{c}{t}$，则

$$L(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{c^2}{t^2}}\frac{c}{t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\frac{c}{y^2}dy,$$

于是

$$2L(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\left(1+\frac{c}{y^2}\right)dy=\int_0^{+\infty}e^{-(y-\frac{c}{y})^2-2c}d(y-\frac{c}{y})。$$

再令$y-\frac{c}{y}=x$，得到

$$L(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{e^{-2c}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}。$$

（2）利用积分号下求导，

$$\frac{dL}{dc}=-2c\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=-2L,$$

于是

$$\frac{dL}{L}=-2dc,$$

对等式两边积分，得到

$$L(c)=L_0e^{-2c},$$

注意到$L(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以

$$L(c)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}。$$

令$t=\sqrt{a}y$，得到

$$\int_0^{+\infty}e^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{ab}{t^2}}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}。$$

15．利用$\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt=\frac{1}{\alpha^2+x^2}$，计算$J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ （$\alpha>0$）。

解 首先有

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\cos\beta xdx\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}\cos\beta xdx。$$

利用例 15.2.8 的结果

$$I(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos 2xtdt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}\text{，}$$

可得

$$\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\cos\beta xdx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\cos\left(2\frac{\beta}{2\sqrt{t}}\sqrt{t}x\right)d(\sqrt{t}x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\text{，}$$

于是

$$J=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\left(t\alpha^2+\frac{\beta^2}{4t}\right)}d\sqrt{t}=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|\beta|}\text{，}$$

其中最后一个等式利用了上题的结论。

# 习　题　15.3　Euler 积分

1. 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$；　　(2) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$；

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ （$n>0$）；　　(4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$ （$n>m>0$）；

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cos^{\frac{1}{2}} x dx$；

(7) $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx$ （$m,n>0$）；　　(8) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}dx$ （$p,q,n>0$）。

解 (1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \mathrm{B}(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma^2(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{8}\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{8}$。

(2) 作变换 $\sqrt{t} = \frac{1-\cos x}{2}$，则

$$x = 2\arcsin t^{\frac{1}{4}},\quad dx = \frac{dt}{2t^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-t^{\frac{1}{2}}}},\quad 3-\cos x = 2(1+t^{\frac{1}{2}}),$$

于是

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})。$$

(3) 作变换 $t = x^n$，则

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}。$$

(4) 作变换 $x^{\frac{n}{2}} = \tan\theta$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{2m}{n}-1}\theta d\theta = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2m}{n}-1}\theta \cos^{1-\frac{2m}{n}}\theta d\theta,$$

再作变换 $t = \sin^2\theta$，得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{m}{n}-1}(1-t)^{-\frac{m}{n}}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}) = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}。$$

(5) 作变换 $t = \frac{x}{1+x}$，则

$$x = \frac{t}{1-t}, dx = \frac{1}{(1-t)^2}dt,$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=\mathrm{B}(\frac{5}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\text{。}$$

（6）作变换$t=\sin^2 x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^{\frac{1}{2}}xdx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^3(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(4+\frac{3}{4})}=\frac{3!}{2\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{256}{1155}\text{。}$$

（7）作变换$t=x^n$，则

$$\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{m+1}{n})\text{。}$$

（8）作变换$t=x^n$，则

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}dx=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{p}{n}-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{1}{n}B\left(\frac{p}{n},q\right)\text{。}$$

2．证明$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$（$n$为正整数），并推出$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$。

**证** 令$t=x^n$，则

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\text{。}$$

利用$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$以及$\Gamma$函数的连续性，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\lim_{n\to\infty}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)=\Gamma(1)=1\text{。}$$

3． 证明$\Gamma(s)$在$s>0$上可导，且$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$。进一步证明$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n dx$ （$n\ge 1$）。

**证** $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$。任意取$0<s_0<S_0<+\infty$。

当$s\ge s_0$，$x\in(0,1]$时，$\left|x^{s-1}e^{-x}\ln x\right|\le x^{s_0-1}|\ln x|$，而$\int_0^1 x^{s_0-1}|\ln x|dx$收敛，所以$\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$在$s\ge s_0$上一致收敛；

当$s\le S_0$，$x\in[1,+\infty)$时，$\left|x^{s-1}e^{-x}\ln x\right|\le x^{S_0}e^{-x}$，而$\int_1^{+\infty}x^{S_0}\mathrm{e}^{-x}dx$收敛，所以$\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$在$s\le S_0$上一致收敛。

这说明$\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$关于$s$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛。于是$\Gamma(s)$在在$s>0$上可导，且$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$。

进一步，若$\Gamma^{(n-1)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^{n-1}dx$，类似于上述的论证过程，可知$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left[x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^{n-1}\right]dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n dx$在$(0,+\infty)$上内闭一致收

敛，从而$\Gamma^{(n-1)}(s)$在$s>0$上可导，并且$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n dx$。

4． 证明$\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty$。

证　首先易知$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$。由于$\Gamma(s)$在$s>0$上可导，由 Rolle 定理，可知$\exists x_0\in(1,2)$，使$\Gamma'(x_0)=0$。

由上题，$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln^2 xdx>0$，于是在$(x_0,+\infty)$上$\Gamma'(s)>0$，因此$\Gamma(s)$在$(x_0,+\infty)$上单调增加。再由$\Gamma([s])\le\Gamma(s)\le\Gamma([s]+1)$，$(s>x_0)$以及$\Gamma(n+1)=n!\to+\infty$，得到

$$\lim_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty。$$

5． 计算$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx$。

解 作变换$x=1-t$，则

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)dt=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)dx，$$

相加后利用余元公式，即得到

$$2\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]dx=\int_0^1(\ln\pi-\ln\sin\pi x)dx。$$

再由

$$\int_0^1\ln\sin\pi xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin udu=-\ln 2，$$

得到

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi}。$$

6．设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le1\}$。确定正数$p$，使得反常重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

收敛。并在收敛时，计算$I$的值

解 利用球坐标变换，可得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\frac{r^2dr}{(1-r^2)^p}=4\pi\int_0^1\frac{r^2dr}{(1-r^2)^p}。$$

由此可知当$p<1$时，反常重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$收敛。

且当$p<1$时，

$$I=2\pi\int_0^1\frac{rdr^2}{(1-r^2)^p}=2\pi\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}dt=2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right)。$$

7．设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x\ge0,y\ge0,z\ge0\}$。确定正数$\alpha,\beta,\gamma$，使得反常重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{1+x^{\alpha}+y^{\beta}+z^{\gamma}}$$

收敛。并在收敛时，计算$I$的值。

解 作变换$\begin{cases} x = u^{\frac{2}{\alpha}} \\ y = v^{\frac{2}{\beta}} \\ z = w^{\frac{2}{\gamma}} \end{cases}$，则

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma}\iiint_{\Omega'} \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2} dudvdw，$$

其中$\Omega' = \{(u,v,w) \mid u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0\}$。

再令$\begin{cases} u = r\sin\varphi\cos\theta \\ v = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，则

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi d\varphi \int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2} dr。$$

对于上式中所包含的前两个积分，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{\beta}-1}\theta\left(\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\theta d\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})；$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma})。$$

对于第三个积分，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2} dr = \int_0^1 \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2} dr + \int_1^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2} dr。$$

因为$\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1 > -1$，所以积分$\int_0^1 \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2} dr$收敛，而积分$\int_1^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2} dr$当且仅当$\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1 < 1$即$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} < 1$时收敛。所以当$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} < 1$时，$\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2} dr$收敛，从而原积分收敛。

这时作变量代换$r^2 = t$，得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2} dr = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}, 1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right)。$$

所以

$$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma})\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{\beta})\Gamma(\frac{1}{\gamma})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma})。$$

**注**　对积分 $\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr$，也可令 $r=\tan\theta$，同样得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan\theta)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}(\cos\theta)^{1-\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\gamma}}d\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)。$$

8．计算

$$I=\iint\limits_D x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{p-1}dxdy，$$

其中**D**是由三条直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域，$m,n,p$ 均为大于 0 的正数。

**解**　作变换 $\begin{cases}u=x+y\\ v=\dfrac{y}{x+y}\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=u(1-v)\\ y=uv\end{cases}$，且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u$，这变换将区域**D**映照成正方形：

$$\{(u,v)|0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1\}。$$

于是

$$I=\int_0^1 u^{m+n-1}(1-u)^{p-1}du\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{m-1}dv=\mathrm{B}(m+n,p)\mathrm{B}(n,m)$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}。$$

**注**　当 $p>1$ 时也可以有如下解法：

将积分化成

$$I=(p-1)\iiint\limits_\Omega x^{m-1}y^{n-1}z^{p-2}dxdydz，$$

其中 $\Omega$ 是由平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 与 $x+y+z=1$ 所围的区域。

再令$\begin{cases}x=u^2\\y=v^2\\z=w^2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}u=r\sin\varphi\cos\theta\\v=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$，就得到

$$I=8(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi d\varphi\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}dr。$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{n-1}(1-\sin^2\theta)^{m-1}d\sin^2\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}(n,m)，$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi)^{m+n-1}(1-\sin^2\varphi)^{p-2}d\sin^2\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{B}(m+n,p-1)，$$

$$\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}dr=\frac{1}{2(m+n+p-1)}，$$

于是

$$I=\frac{p-1}{m+n+p-1}\mathrm{B}(n,m)\mathrm{B}(m+n,p-1)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}。$$

9．证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha}xdx=\dfrac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ （$|\alpha|<1$）。

证 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cos^{-\alpha}xdx=\frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1-\alpha}{2})$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha+1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}。$$

10．证明

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}$$

（$0<\alpha<2, 0<k<1$）。

证 作变量代换$t=\tan\dfrac{\varphi}{2}$，则

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+k)+(1-k)t^2}，$$

再作变量代换$\sqrt{\dfrac{1-k}{1+k}}\,t=\tan\theta$，则

$$2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+k)+(1-k)t^2}=$$

$$\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha-1}\theta d\theta=\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{1-\alpha}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}B\left(\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi},$$

这里最后一个等式利用了余元公式。所以

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}。$$

11．设$0\le h<1$，正整数$n\ge 3$。证明

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\ge\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

证 作变量代换 $t=hu$，则

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt=h\int_0^1(1-h^2u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\ge h\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt,$$

再作变量代换$u=\sin\theta$，得到

$$h\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt=h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta d\theta=\frac{h}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)。$$

$$=\frac{h}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

所以

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\ge\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

# 第十六章　Fourier 级数

## 习题　16.1　函数的 Fourier 级数展开

1. 设交流电的变化规律为 $E(t)=A\sin\omega t$，将它转变为直流电的整流过程有两种类型：

　⑴　半波整流（图 16.1.5(a)）

$$f_1(t)=\frac{A}{2}(\sin\omega t+|\sin\omega t|)；$$

　⑵　全波整流（图 16.1.5(b)）

$$f_2(t)=A|\sin\omega t|；$$

现取 $\omega=1$，试将 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 展开为 Fourier 级数。

(a)

(b)

图 16.1.5

解　(1)　$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)dx=\dfrac{2A}{\pi}$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos nxdx=-\dfrac{2A}{\pi(n^2-1)}$　$(n=2,4,6,\cdots)$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos nxdx=0$，$(n=1,3,5,\cdots)$；

$b_1=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin xdx=\dfrac{A}{2}$，

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin nxdx=0$，$(n=2,3,4,\cdots)$。

$$f_1(x)\sim\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin x-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}。$$

(2)　$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)dx=\dfrac{4A}{\pi}$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos nxdx=-\dfrac{4A}{\pi(n^2-1)}$　$(n=2,4,6,\ldots)$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos nxdx=0$　$(n=1,3,5,\ldots)$；

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\sin nxdx=0$，$(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f_2(x)\sim\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}。$$

2. 将下列函数在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数：

⑴　$f(x)=\operatorname{sgn} x$；　　　　⑵　$f(x)=|\cos x|$；

(3) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\pi^2$;　　　　　(4) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[-\pi,0),\\ 0, & x\in[0,\pi);\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}ax, & x\in[-\pi,0),\\ bx, & x\in[0,\pi).\end{cases}$

解（1） $f(x)$ 为奇函数，所以 $a_n=0$，（$n=0,1,2,\dots$），

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2(1-\cos(n\pi))}{n\pi}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}。$$

（2） $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{4}{\pi}$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=-\frac{4(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(n^2-1)}$ ，（$n=2,4,6,\cdots$），

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0$，（$n=1,3,5,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx。$$

（3） $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=-\frac{5}{3}\pi^2$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2(-1)^n}{n^2}$ （$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim-\frac{5}{6}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx。$$

（4） $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=-\frac{\pi}{2}$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{\cos(n\pi)}{n}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx。$$

（5） $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi(b-a)}{2}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{(a-b)(1-(-1)^n)}{\pi n^2}$$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{(a+b)\cos(n\pi)}{n}$$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim-\frac{(a-b)\pi}{4}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$。

3. 将下列函数展开成正弦级数：

（1）$f(x)=\pi+x$，$x\in[0,\pi]$；（2）$f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$，$x\in[0,\pi]$；

（3）$f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,\frac{\pi}{2}),\\ \pi, & x\in[\frac{\pi}{2},\pi];\end{cases}$ （4）$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in[1,2].\end{cases}$

解（1）$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=2\cdot\frac{1-2(-1)^n}{n}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx$$。

（2）$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2n\left[1-(-1)^n e^{-2\pi}\right]}{\pi(4+n^2)}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[1-(-1)^n e^{-2\pi}\right]}{n^2+4}\sin nx$$。

（3）$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{-2\left[n\pi(-1)^n-2\sin\frac{n\pi}{2}\right]}{\pi n^2}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx$$。

（4）$b_1=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin xdx=\frac{1}{\pi}$，

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin nxdx=\frac{2(n-\sin\frac{n\pi}{2})}{\pi(n^2-1)}$$，（$n=2,3,4,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}x$$。

4. 将下列函数展开成余弦级数：

（1）$f(x)=x(\pi-x)$，$x\in[0,\pi]$；（2）$f(x)=\mathrm{e}^x$，$x\in[0,\pi]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in[0,\frac{\pi}{4}),\\ 1, & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}];\end{cases}$ (4) $f(x)=x-\frac{\pi}{2}+\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$，$x\in[0,\pi]$.

解（1） $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi^2}{3}$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=-\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2}，（n=1,2,3,\cdots）。$$

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^2}。$$

（2） $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}(e^{\pi}-1)$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2\left[e^{\pi}(-1)^n-1\right]}{\pi(1+n^2)}，（n=1,2,3,\cdots）。$$

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n e^{\pi}-1\right]}{n^2+1}\cos nx。$$

（3） $a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{2+\pi}{\pi}$，

$$a_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2xdx=-\frac{1}{\pi}，$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nxdx=\frac{2}{\pi(n^2-1)n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-n\right)，（n=2,3,4,\cdots）。$$

$$f(x)\sim(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2})-\frac{1}{\pi}\cos 2x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos 2nx。$$

（4） $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi}{2}$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{4\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]}{\pi n^2}，（n=1,2,3,\cdots）。$$

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]}{n^2}\cos nx。$$

5. 求定义在任意一个长度为 $2\pi$ 的区间 $[a,a+2\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数及其系数的计算公式。

解 设 $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，则

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos mxdx = \int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos mxdx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_a^{a+2\pi}\cos mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_a^{a+2\pi}\cos nx\cos mxdx + b_n\int_a^{a+2\pi}\sin nx\cos mxdx)$$

$= a_m\pi$，（$m = 0,1,2,\ldots$），

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin mxdx = \int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\sin mxdx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_a^{a+2\pi}\sin mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_a^{a+2\pi}\cos nx\sin mxdx + b_n\int_a^{a+2\pi}\sin nx\sin mxdx)$$

$= b_m\pi$，（$m = 1,2,\ldots$），

所以

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nxdx \quad (n = 1,2,\cdots)。$$

6. 将下列函数在指定区间展开成 Fourier 级数：

(1) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$，$x \in [0, 2\pi]$；

(2) $f(x) = x^2$，$x \in [0, 2\pi]$；

(3) $f(x) = x$，$x \in [0, 1]$；

(4) $f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [-1,0), \\ 0, & x \in [0,1); \end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} C, & x \in [-T,0), \\ 0, & x \in [0,T) \end{cases}$（$C$ 是常数）.

解（1） $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = 0$，（$n = 0,1,2,\cdots$），

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \dfrac{1}{n}$，（$n = 1,2,3,\cdots$）。

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx。$$

（2） $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \dfrac{8}{3}\pi^2$，

$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = \dfrac{4}{n^2}$，（$n = 1,2,3,\cdots$），

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = -\dfrac{4\pi}{n}$，（$n = 1,2,3,\cdots$）。

$$f(x) \sim \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right)。$$

(3) $a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 1$，

$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx dx = 0$，（$n = 1,2,3,\cdots$），

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx dx = -\frac{1}{n\pi}$，（$n = 1,2,3,\cdots$）。

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi nx。$$

(4) $a_0 = \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{3}(1-e^{-3})$，

$a_n = \int_{-1}^1 f(x)\cos \pi nx dx = \frac{3}{9+n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n e^{-3}\right]$，（$n = 1,2,3,\cdots$），

$b_n = \int_{-1}^1 f(x)\sin \pi nx dx = \frac{n\pi}{9+n^2\pi^2}\left[-1+(-1)^n e^{-3}\right]$，（$n = 1,2,3,\cdots$）。

$$f(x) \sim \frac{1}{6}(1-e^{-3}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3\left(1-(-1)^n e^{-3}\right)}{n^2\pi^2+9}\cos n\pi x - \frac{n\pi\left(1-(-1)^n e^{-3}\right)}{n^2\pi^2+9}\sin n\pi x\right]。$$

(5) $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx = C$，

$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{\pi nx}{T}dx = 0$，（$n = 1,2,3,\cdots$），

$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{\pi nx}{T}dx = \frac{C}{n\pi}\left[-1+(-1)^n\right]$，（$n = 1,2,3,\cdots$）。

$$f(x) \sim \frac{C}{2} - \frac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{T}x。$$

7. 某可控硅控制电路中的负载电流为

$$I(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < T_0, \\ 5\sin\omega t, & T_0 \le t < T, \end{cases}$$

其中ω为圆频率，周期$T = \frac{2\pi}{\omega}$。现设初始导通时间$T_0 = \frac{T}{8}$（见图 16.1.6），求$I(t)$在$[0,T]$上的 Fourier 级数。

解 $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{5(\sqrt{2}-2)}{2\pi}$，

图 16.1.6

$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi x}{T}dx = -\frac{5}{4\pi}$，

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx = \frac{5}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} - \frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4} + \frac{2}{n^2-1}\right]$，

（$n=2,3,4,\cdots$），

$b_1=\dfrac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\dfrac{2\pi x}{T}dx=\dfrac{5(7\pi+2)}{8\pi}$，

$b_n=\dfrac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\dfrac{2\pi nx}{T}dx=\dfrac{5}{2\pi}\left[\dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}-\dfrac{1}{n-1}\sin\dfrac{(n-1)\pi}{4}\right]$，

（$n=2,3,4,\cdots$）。

$$f(x)\sim-\frac{5}{4\pi}(2-\sqrt{2})-\frac{5}{4\pi}\cos\omega t+\left(\frac{5}{4\pi}+\frac{35}{8}\right)\sin\omega t$$

$$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+\frac{2}{n^2-1}\right]\cos n\omega t$$

$$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]\sin n\omega t\text{。}$$

8．设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，证明：

(1) 若对于任意 $x\in[-\pi,\pi]$，成立 $f(x)=f(x+\pi)$，则 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$；

(2) 若对于任意 $x\in[-\pi,\pi]$，成立 $f(x)=-f(x+\pi)$，则 $a_{2n}=b_{2n}=0$．

证（1）$a_{2n-1}=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)xdx+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos[(2n-1)t-(2n-1)\pi]dt+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx\quad(t=x+\pi)$

$=0$，（$n=1,2,3,\ldots$），

$b_{2n-1}=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)xdx$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)xdx+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)xdx$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin[(2n-1)t-(2n-1)\pi]dt+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)xdx\quad(t=x+\pi)$

$=0$，（$n=1,2,3,\ldots$）。

(2) $a_{2n}=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2nx)dx+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-f(t)\cos(2nt-2n\pi)dt+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx\quad(t=x+\pi)$

$=0$，（$n=1,2,3,\ldots$），

$$b_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2nx)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2nx)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-f(t)\sin(2nt-2n\pi)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2nx)dx \quad (t=x+\pi)$$
$=0$，（$n=1,2,3,\ldots$）。

9. 设 $f(x)$ 在 $(0,\pi/2)$ 上可积或绝对可积，应分别对它进行怎么样的延拓，才能使它在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的形式为

(1) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x$; (2) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2nx$ .

解 (1) 显然，$f(x)$ 为偶函数，而且

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx \quad （令 t=\pi-x）$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-t)\cos(2nt)dt$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(\pi-x)\right]\cos(2nx)dx=0,$$

所以

$$f(x)+f(\pi-x)=0,$$

于是 $f(x)$ 可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}-f(\pi+x) & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})\\ f(-x) & x\in(-\frac{\pi}{2},0)\\ f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}。$$

(2) 显然，$f(x)$ 为奇函数，而且

$$b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin\left[(2n-1)x\right]dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin\left[(2n-1)x\right]dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin\left[(2n-1)x\right]dx \quad （令 t=\pi-x）$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left[(2n-1)x\right]dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t)\sin\left[(2n-1)t\right]dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(\pi-x)\right]\sin\left[(2n-1)x\right]dx=0\text{，}$$

所以

$$f(x)+f(\pi-x)=0\text{，}$$

于是 $f(x)$ 可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(\pi+x) & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2}) \\ -f(-x) & x\in(-\frac{\pi}{2},0) \\ f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2}) \\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi) \end{cases}\text{。}$$

10. 设周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数为 $a_n$ 和 $b_n$，求下列函数的 Fourier 系数 $\tilde{a}_n$ 和 $\tilde{b}_n$：

(1) $g(x)=f(-x)$；　　(2) $h(x)=f(x+C)$（$C$ 是常数)；

(3) $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)dt$　（假定积分顺序可以交换)。

解（1）$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos nxdx$ （令 $t=-x$）

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdx\text{，}$$

所以

$$\tilde{a}_n=a_n\quad(n=0,1,2,\cdots)\text{，}$$

$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin nxdx$ （令 $t=-x$）

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdx\text{，}$$

所以

$$\tilde{b}_n=-b_n\quad(n=1,2,\cdots)\text{。}$$

（2）因为 $x+C\in[-\pi,\pi]$，所以 $x\in[-\pi-C,\pi-C]$。

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C}h(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C}f(x+C)\cos nxdx \quad （令 t=x+C）$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n(t-C)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\cos nCdx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\sin nCdx$$

$$=a_n\cos nC+b_n\sin nC \qquad (n=0,1,2,\cdots)，$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C}h(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C}f(x+C)\sin nxdx \quad （令 t=x+C）$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin n(t-C)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\cos nCdx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\sin nCdx$$

$$=b_n\cos nC-a_n\sin nC \qquad (n=1,2,\cdots)。$$

（3）$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)\,dx\right]\cos nxdx$（交换次序）

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\cos nx\,dx\right]f(t)dt。$$

当 $n=0$ 时，

$$\tilde{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\,dx\right]f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_0f(t)dt=a_0^2，$$

当 $n>0$ 时，

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)[\cos n(x-t)\cos nt-\sin n(x-t)\sin nt]dx\right]f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nt-b_n\sin nt)f(t)dt=a_n^2-b_n^2， \quad (n=1,2,\cdots)。$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)\,dt\right]\cos nxdx \quad （交换次序）$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\cos nx\,dx\right]f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)[\sin n(x-t)\cos nt+\cos n(x-t)\sin nt]dx\right]f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(b_n \cos nt + a_n \sin nt) f(t) dt = 2a_n b_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)。$$

# 习题 16.2　Fourier 级数的收敛判别法

1．设$\psi(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px dx=0\ .$$

**证**　因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，所以存在$N>0$，使得当$x\geq N$时，$|\psi(x)|<1$。利用积分第二中值定理可得

$$\left|\int_N^A\psi(x)\sin px\,dx\right|=\left|\psi(N)\int_N^\xi\sin px\,dx+\psi(A)\int_\xi^A\sin px\,dx\right|$$

$$<\left|\int_N^\xi\sin px\,dx\right|+\left|\int_\xi^A\sin px\,dx\right|\leq\frac{4}{p}\quad(\forall A>N),$$

因此$\left|\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx\right|\leq\frac{4}{p}$，从而

$$\lim_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx=0\text{。}$$

而由 Riemann 引理，

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^N\psi(x)\sin pxdx=0\text{。}$$

因此

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px\,dx=\lim_{p\to+\infty}\int_0^N\psi(x)\sin px\,dx+\lim_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin px\,dx=0\text{。}$$

2．设函数$\psi(u)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积，在$u=0$点连续且有单侧导数，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du=\frac{1}{2}\int_0^\pi[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}du\text{。}$$

**证**　$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du=\int_0^\pi[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du\text{。}$$

由于

$$\lim_{u\to 0+}\frac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}=\lim_{u\to 0+}\frac{\psi(u)-\psi(0)-[\psi(-u)-\psi(0)]}{u}\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}=\psi'_+(0)+\psi'_-(0)，$$

可知函数$\frac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$在$[0,\pi]$上可积或绝对可积，由 Riemann 引理可得

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}du=0。$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}du\to 0，（p\to+\infty）。$$

3．设函数$\psi(u)$在$[-\delta,\delta]$上单调，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}du=0 .$$

**证**　$$\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}du$$

$$=\int_0^{\delta}\{[\psi(u)-\psi(0+)]+[\psi(-u)-\psi(0-)]\}\frac{\sin pu}{u}du$$

$$=\int_0^{\delta}[\psi(u)-\psi(0+)]\frac{\sin pu}{u}du+\int_0^{\delta}[\psi(-u)-\psi(0-)]\frac{\sin pu}{u}du，$$

因为$\psi(u)$在$[-\delta,\delta]$上单调，所以$\psi(u)-\psi(0+)$和$\psi(-u)-\psi(0-)$都在$[0,\delta]$上单调，利用 Dirichlet 引理即得结论。

4．证明 Dirichlet 引理对$\psi(u)$是分段单调有界函数的情况依然成立。

**证**　由于$\psi(u)$在$[0,\delta]$分段单调，所以存在$\delta_1\in(0,\delta)$，使得$\psi(u)$在$[0,\delta_1]$上单调，从而满足 Dirichlet 引理条件。由于在$[\delta_1,\delta]$上$\psi(u)$分段单调有界，所以$\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}$在$[\delta_1,\delta]$上满足 Riemann 引理条件。于是

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pudu$$
$$=\lim_{p\to\infty}\int_0^{\delta_1}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pudu+\lim_{p\to\infty}\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pudu=0。$$

5．证明 Lipschitz 判别法的推论。

**证**　取$\alpha=1$。设$\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}=A$，则存在$\delta_1>0$，当$0<u<\delta_1$时，成立

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}-A\right|\le 1，$$

令$L_1=|A|+1$，则有

$$|f(x+u)-f(x+)|\le L_1|u|。$$

同理存在$\delta_2>0$与$L_2>0$，当$0<u<\delta_2$时，有

$$|f(x-u)-f(x-)|\le L_2|u|。$$

于是令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，$L=\max\{L_1,L_2\}$，当$0<u<\delta$时，有

$$|f(x\pm u)-f(x\pm)|\le L|u|，$$

所以$f(x)$满足 Lipschitz 判别法的条件，推论成立。

6．对§16.1 的习题 2、3、4、6 中的函数，验证它们的 Fourier 级数满足收敛判别法的条件，并分别写出这些 Fourier 级数的和函数。

**解**　容易验证这些函数都是分段单调有界，因而可积或绝对可积，所以满足 Dirichlet-Jordan 判别法的条件。

习题 2 各函数 Fourier 级数的和函数为

（1）$\begin{cases}1, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ -1, & x\in(-\pi,0),\end{cases}$。　　（2）$|\cos x|$，$x\in[-\pi,\pi]$。

（3）$\frac{x^2}{2}-\pi^2$，$x\in[-\pi,\pi]$。

（4）$\begin{cases} 0, & x\in[0,\pi), \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi, \\ x, & x\in(-\pi,0), \end{cases}$ 。（5）$\begin{cases} bx, & x\in[0,\pi), \\ (b-a)\dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi, \\ ax, & x\in(-\pi,0), \end{cases}$。

习题 3 各函数 Fourier 级数的和函数为

（1）$\begin{cases} x+\pi, & x\in(0,\pi), \\ 0, & x=0,\pm\pi, \\ x-\pi, & x\in(-\pi,0), \end{cases}$ 。 （2）$\begin{cases} \mathrm{e}^{-2x}, & x\in(0,\pi), \\ 0, & x=0,\pm\pi, \\ -\mathrm{e}^{2x}, & x\in(-\pi,0), \end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}), \\ 0, & x=\pm\pi, \\ \pi, & x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi), \\ -\pi, & x\in(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}), \end{cases}$ 。（4）$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in(0,1), \\ 0, & x=0, x\in[1,2]\cup[-2,-1], \\ -\cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in(-1,0), \end{cases}$。

习题 4 各函数 Fourier 级数的和函数为

（1）$\pi|x|-x^2$，$x\in[-\pi,\pi]$。 （2）$\mathrm{e}^{|x|}$，$x\in[-\pi,\pi]$。

（3）$\begin{cases} \sin 2|x|, & x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}), \\ 1, & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\cup[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}]. \end{cases}$。（4）$|x|-\dfrac{\pi}{2}+\left||x|-\dfrac{\pi}{2}\right|$，$x\in[-\pi,\pi]$。

习题 6 各函数 Fourier 级数的和函数为

（1）$\begin{cases} \dfrac{\pi-x}{2}, & x\in(0,\ 2\pi), \\ 0, & x=0,\ 2\pi. \end{cases}$ 。 （2）$\begin{cases} x^2, & x\in(0,\ 2\pi), \\ 2\pi^2, & x=0,\ 2\pi. \end{cases}$。

（3）$\begin{cases} x, & x\in(0,\ 1), \\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\ 1. \end{cases}$ 。

（4）$\begin{cases} \mathrm{e}^{3x}, & x\in(-1,0), \\ 0, & x\in(0,1), \\ \dfrac{1}{2}, & x=0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{2}, & x=\pm1. \end{cases}$ 。（5）$f(x)=\begin{cases} C, & x\in(-T,0), \\ 0, & x\in(0,T), \\ \dfrac{C}{2}, & x=0,\pm C. \end{cases}$ 。

7．利用$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，证明：

⑴ $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$； ⑵ $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$．

**证** （1）由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{\pi^2}{24},$$

所以

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{2\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}。$$

⑵ $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$。

8. 求$\sin x$全部非零零点的倒数的平方和。

**解** $\sin x$全部非零零点为$\{\pm\pi,\pm2\pi,\cdots,\pm n\pi,\cdots\}$，所以其倒数的平方和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n\pi)^2}=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{3}。$$

9. 证明下列关系式：

⑴ 对$0<x<2\pi$且$a\neq0$，有

$$\pi\,\mathrm{e}^{ax}=(\mathrm{e}^{2a\pi}-1)\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}\right];$$

⑵ 对$0<x<2\pi$且$a$不是自然数，有

$$\pi\cos ax=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos nx+n(\cos 2a\pi-1)\sin nx}{a^2-n^2};$$

⑶ 对⑵，令$x=\pi$，有

$$\frac{a\pi}{\sin a\pi}=1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}.$$

**证** ⑴ $f(x)=\pi e^{ax}$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调连续有界，所以它在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0,2\pi)$ 上收敛到自身。由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{a(e^{2a\pi}-1)}{a^2+n^2}\text{，}\ (n=0,1,2,\cdots)\text{，}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{n(e^{2a\pi}-1)}{a^2+n^2}\text{，}\ (n=1,2,3,\cdots)\text{，}$$

可知（1）式成立。

（2） $f(x)=\pi\cos ax$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调连续有界，所以它在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0,2\pi)$ 上收敛到自身。由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2}\text{，}\ (n=0,1,2,\cdots)\text{，}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{n(\cos 2a\pi-1)}{a^2-n^2}\text{，}\ (n=1,2,3,\cdots)\text{，}$$

可知（2）式成立。

（3）对⑵，令 $x=\pi$，利用 $\sin 2a\pi=2\sin a\pi\cos a\pi$，有

$$\pi\cos a\pi=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos n\pi}{a^2-n^2}$$

$$=\frac{\sin a\pi\cos a\pi}{a}\left[1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\right]\text{，}$$

所以（3）式也成立。

10．⑴验证函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln\frac{|x|}{2\pi}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件而不满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。

⑵ 验证函数

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

满足 Dini-Lipschitz 判别法条件（今后会学到，它不满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件，在此从略）。

证 （1）$f(x)$是偶函数，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$，且当$x>0$时，$f'(x)=-\dfrac{1}{\left(\ln\frac{|x|}{2\pi}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}<0$，所以$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上是分段单调的连续函数，满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件。但对于任意的$\alpha\in(0,1]$，由于$\lim\limits_{u\to 0+} u^\alpha \ln\dfrac{u}{2\pi}=0$，所以

$$\frac{|f(0+u)-f(0+)|}{u^\alpha}=\frac{1}{u^\alpha\left|\ln\dfrac{u}{2\pi}\right|}$$

无界，因此$f(x)$在$x=0$点不满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。

（2）当$x\neq 0$时，$f'(x)=\cos\frac{\pi}{2x}+\frac{\pi}{2x}\sin\frac{\pi}{2x}$，导数存在；在$x=0$，成立

$$|f(0\pm u)-f(0\pm)|=|x\cos\frac{\pi}{2x}|\leq|x|,$$

即满足 Lipschitz 条件，所以$f(x)$满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。

今后会学到，对任意的$\delta>0$，$f(x)$在区间$[-\delta,\delta]$上不是有界变差函数，所以不能写成两个单调有界函数之差。

# 习题　16.3 Fourier 级数的性质

1.　由例 16.1.2 的结果

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\text{，}\qquad x\in(-\pi,\pi)\text{，}$$

用逐项积分法求 $x^2$ 和 $x^3$ 的 Fourier 级数。

解　由于 $x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界可积，其 Fourier 级数可以逐项积分，

$$x^2 = 2\int_0^x tdt = 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin ntdt$$

$$=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos nt-1)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt \text{（习题 16.2.7.(1)）}$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\text{，}\quad x\in[-\pi,\pi]\text{。}$$

对 $3x^2$ 的 Fourier 级数逐项积分，

$$x^3 = 3\int_0^x t^2dt = 3\int_0^x \frac{\pi^2}{3}dt + 12\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^n}{n^2}\cos ntdt$$

$$=\pi^2 x + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-\pi^2n^2)}{n^3}\sin nx\text{，}\quad x\in(-\pi,\pi)\text{。}$$

2．证明定理 16.3.2 的推论 16.3.1：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是某个可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛。

证　设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{，}$$

令

$$F(x)=\int_c^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt。$$

根据定理 16.3.2 的证明过程，$F(x)$满足 Dini-Lipschitz 判别法的推论的条件，$F(x)$可展开为收敛的 Fourier 级数

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right)，\quad x\in[-\pi,\pi]，$$

令$x=0$，得到$F(0)=\frac{A_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$，这就说明了级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛。

3．说明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$点点收敛，但不可能是任何可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

解 对于任意固定的 $x$，$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$，$\left\{\frac{1}{\ln\ln n}\right\}$单调趋于 0，$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right\}$有界，根据 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$收敛。

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln\ln n}$都是发散的，所以这两个级数不可能是可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

4．利用例 16.1.1 的结果

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

和 Parseval 等式，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$。

证 因为$f(x)$在$[-\pi,\pi]$可积且平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dx=1=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}\right)^2，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}。$$

5．利用例 16.1.2 的结果

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,\pi) \\ -x & x\in[-\pi,0) \end{cases} \sim \frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx,$$

和 Parseval 等式，求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$。

解　因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right]^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\left(\frac{2}{3}\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^4}{96}。$$

6．利用

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in(-\pi,\pi)$$

和 Parseval 等式，求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$。

解　因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4dx=\frac{2}{5}\pi^4=2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(\frac{2}{5}\pi^4-\frac{2}{9}\pi^4\right)\frac{1}{16}=\frac{\pi^4}{90}。$$

7．设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 $2\pi$ 为周期，且具有二阶连续导数的函数，

记

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\quad b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nxdx。$$

证明：若$\sum_{n=1}^{\infty}b_n''$绝对收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)。$$

证　利用分部积分法，

$$\begin{aligned} b_n'' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[ f'(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx\right] \\ &= \frac{n}{\pi}\left[-f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] = -n^2 b_n, \end{aligned}$$

由于

$$\sqrt{|b_n|}=\frac{1}{n}\sqrt{|n^2 b_n|}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|n^2 b_n|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b_n''|\right)\quad (n=1,2,\cdots),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}\le\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)。$$

8．设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的以 $2\pi$ 为周期的连续函数。证明：若 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零，则 $f(x)\equiv 0$。

证　由于 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零，利用 Parseval 等式，可知 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=0$。再由 $f(x)$ 为连续函数，即可得到 $f(x)\equiv 0$。

9．设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的任意一个连续函数，证明对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在三角多项式

$$\psi_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|dx<\varepsilon。$$

证　设 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)。$$

因为 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的连续函数，由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) \text{，}$$

可知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}({a_k}^2 + {b_k}^2) < \dfrac{\varepsilon^2}{2\pi^2}$。令

$$\psi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n > N) \text{，}$$

则由定理 16.3.3，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - \psi_n(x)|^2 \, dx = \sum_{k=n+1}^{\infty}({a_k}^2 + {b_k}^2) < \frac{\varepsilon^2}{2\pi^2} \text{。}$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - \psi_n(x)| \, dx \le \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - \psi_n(x)|^2 \, dx \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx}$$

$$= \sqrt{2\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - \psi_n(x)|^2 \, dx} < \varepsilon \text{。}$$

# 习题　16.4　Fourier 变换和 Fourier 积分

1．求下列定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数的 Fourier 变换：

（1）　$f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<\delta,\\ 0, & 其它;\end{cases}$　　（2）　$f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$，　$a>0$；

（3）　$f(x)=\mathrm{e}^{-ax^2}$，　$a>0$；　　（4）　$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

（5）　$f(x)=\begin{cases}A\cos\omega_0 x, & |x|\le\delta,\\ 0, & |x|>\delta;\end{cases}$　$\omega_0\ne 0$是常数，$\delta=\dfrac{\pi}{\omega_0}$。

解　（1）　$\tilde f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_0^{\delta}Ae^{-i\omega x}dx=\dfrac{A}{i\omega}(1-e^{-i\omega\delta})$。

（2）　$\tilde f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(a+i\omega)x}dx+\int_{-\infty}^{0}e^{(a-i\omega)x}dx$

$$=\frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a-i\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}。$$

（3）　$\tilde f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\cos\omega x dx$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos\frac{\omega t}{\sqrt a}d\frac{t}{\sqrt a}$$　（利用例 15.2.8 的结果）

$$=\frac{\sqrt\pi}{\sqrt a}e^{-\left(\frac{\omega}{2\sqrt a}\right)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}。$$

（4）　$\tilde f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(2+i\omega)x}dx=\dfrac{1}{2+i\omega}$。

（5）　$\tilde f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\delta}^{\delta}A\cos\omega_0 x e^{-i\omega x}dx$

$$=\int_{-\delta}^{\delta}A\cos\omega_0 x\cos\omega x dx$$（虚部为奇函数，积分为 0）

$$=\frac{A}{2}\int_{-\delta}^{\delta}[\cos(\omega_0-\omega)x+\cos(\omega_0+\omega)x]dx$$

$$=A\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\delta}{(\omega-\omega_0)}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\delta}{(\omega+\omega_0)}\right]。$$

2．求 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}$（$x\in[0,+\infty)$，$a>0$）的正弦变换和余弦变换。

解　正弦变换：

$$\tilde f(\omega)=\int_0^{+\infty}f(x)\sin\omega x dx=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin\omega x dx=\frac{\omega}{a^2+\omega^2},$$

余弦变换：

$$\tilde{f}(\omega)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x dx=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos\omega x dx=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$ 。

3．设 $f_1(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 求 $f_1 * f_2(x)$。

解　记 $F(x)= f_1 * f_2(x)= f_2 * f_1(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t) f_1(x-t)dt$，考虑 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

当 $x\le 0$ 时，$f_1(x-t)=0$，所以 $F(x)=0$；

当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时，$f_1(x-t)=e^{-(x-t)}$，所以

$$F(x)=e^{-x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin(t)dt=\frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}})$$；

当 $0<x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$f_1(x-t)=\begin{cases} e^{-(x-t)}, & x>t \\ 0, & x\le t \end{cases}$，所以

$$F(x)=e^{-x}\int_0^{x} e^t\sin(t)dt=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x})$$ 。

于是

$$f_1 * f_2(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x}), & 0<x\le\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}}), & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

# 习题　16.5　快速 Fourier 变换

1．　说明离散 Fourier 变换 $X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}$ 可以看成 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}dx$$

的离散近似形式的推广。

解　假设 $\omega>0$

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{\omega x}{2\pi}}dx\approx\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-2\pi i(\frac{\omega n\Delta x}{2\pi})}\Delta x\ ,$$

取 $\Delta x$ 使 $\frac{\omega\Delta x}{2\pi}=\frac{1}{N}$，记 $W=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{N}}$，则 $k$ 为整数时，$W^{kN+n}=W^n$。于是

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}W^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f((kN+n)\Delta x)\Delta x\ ,$$

记 $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f((kN+n)\Delta x)\Delta x$，所以

$$X(j)=\hat{f}(j\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}W^{jn}x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}\ 。$$

2．　证明正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\delta_{j,k}\,。$$

解　显然，$j=k$ 时，$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nk}{N}}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{nk}{N}}=1$。

下面考虑 $j\neq k$，不妨设 $j<k$。根据当 $\xi\neq 1$ 是方程 $x^N=1$ 的一个根时，有 $\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=0$，令 $\xi=\mathrm{e}^{2\pi i\frac{(k-j)}{N}}\neq 1$，则 $\xi^N=\mathrm{e}^{2(k-j)\pi i}=1$。于是

$$\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{n(k-j)}{N}}=0\,。$$

3．　设 $N=pq$ （$p,q\in\mathbf{N}$），构造只需 $O((p+q)N)$ 次运算的 Fourier 变换

算法。

解　令$W=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{N}}$，则$k$为整数时，$W^{kN+n}=W^n$。假设

$$j=j_1q+j_0,\quad j_1=0,1,\cdots,p-1,\ \ j_0=0,1,\cdots,q-1,$$

$$n=n_1p+n_0,\quad n_1=0,1,\cdots,q-1,\ \ n_0=0,1,\cdots,p-1。$$

$$X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{jn}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{p-1}\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{j(n_1p+n_0)}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{p-1}W^{jn_0}\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}\ 。$$

固定$j$，计算$\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}$需要$q-1$次乘法（$n_1=0$不需要做乘法），对于相同的$j_0$，$\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}$是相同的，无需重复计算，所有此类和式共需$q(q-1)$次乘法。对$n_0$求和需要$(p-1)N$次乘法，所以，总共需要$q(q-1)+(p-1)N=O((p+q)N)$次乘法。

4．　对$N=2^3$，具体写出以 2 为底的 FFT 的计算流程。

解　记$W=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{8}}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{4}}$，则$W^4=-1,W^8=1$。可得计算公式

$$X(j)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W^{jn},\quad j=0,1,\cdots,7.$$

$$=[x(0)+(-1)^jx(4)]+W^j[x(1)+(-1)^jx(5)]$$

$$+W^{2j}\{[x(2)+(-1)^jx(6)]+W^j[x(3)+(-1)^jx(7)]\}\ 。$$

计算流程

第一步：

$$x_1(i)=x(i)+x(i+4),$$
$$x_1(i+4)=W^i[x(i)-x(i+4)],i=0,1,2,3.$$

第二步：

$$x_2(i)=x_1(i)+x_1(i+2),$$
$$x_2(i+2)=W^{2i}[x_1(i)-x_1(i+2)], i=0,1,4,5.$$

第三步：

$$X(i)=x_2(i)+x_2(i+1),$$
$$X(i+4)=x_2(i)-x_2(i+1), i=0,2,$$
$$X(i)=x_2(i+3)+x_2(i+4),$$
$$X(i+4)=x_2(i+3)-x_2(i+4), i=1,3.$$

# 计 算 实 习 题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 利用现成的数学通用软件（如 MATLAB、Mathematica、Maple 等），对于 $N=32, 64, 128$ ：

(1) 生成实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ ；

(2) 用 FFT 计算 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 变换序列 $\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$ ；

(3) 作出 $\{x(k)\}$ 和 $\{|X(j)|\}$ 的图并进行分析（参见图 16.5.4）；

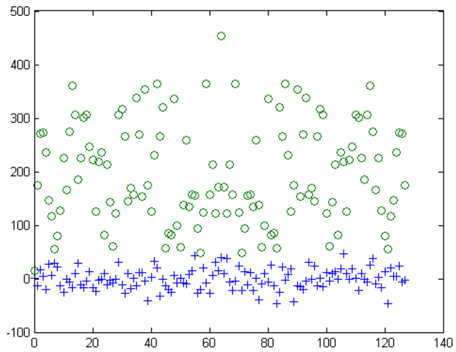
(4) 设定 $\delta_0>0$ ，将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)|<\delta_0$ 的数据全部置为零，再进行离散 Fourier 逆变换，将得到的数据与 $\{x(k)\}$ 比较；

(5) 改变 $\delta_0$ 的值，重复(4)，分析不同的 $\delta_0$ 对逆变换所得到的数据的影响。

解　源程序为

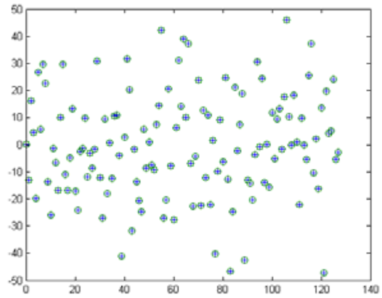
```
function ex1601(N)
t=0:N-1;
x=randn(N,1)*20;%randn
y=fft(x,N);
z=abs(y);
plot(t,x,'+',t,z,'o')
%
delta=input('请输入误差');
for i=0:N-1
    if z(i+1)<delta
        y(i+1)=0;
    end
end
z=real(ifft(y));
plot(t,x,'+',t,z,'o')
```

运行结果分析：以 N=128 为例。本程序数据是随机产生的，“ + ”为原始数据，“ o ”为变换后的模的数据。

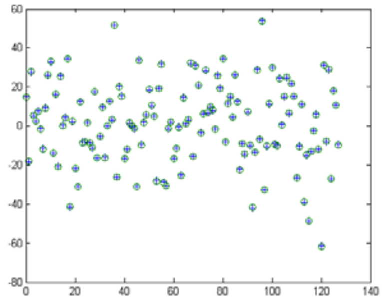



取 $\delta_0=5$ ，将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)|<\delta_0$ 的数据全部置为零，再进行离散

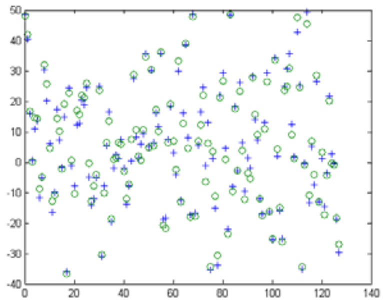
Fourier 逆变换。“ + ” 为原始数据，“ o ” 为置零后变换得到的数据，与$\{x(k)\}$比较几乎重合



取$\delta_0 = 50$，同样处理后得到的数据，与$\{x(k)\}$比较有些小误差。



取$\delta_0 = 100$，同样处理后得到的数据，与$\{x(k)\}$比较误差清晰可见，但不很大。



由于数据源不同，结果会有所差异。

2. 对于$N = 32, 64, 128$ ，

(1) 产生两个实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和$\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$ ；

(2) 用直接方法计算 $\{x(k)\}$和$\{y(k)\}$的卷积$\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$；

(3) 改用离散 Fourier 变换的思想，用 FFT 计算$\{z(k)\}$ ；

(4) 结合$N$比较两种算法所用的时间。

解　源程序为

```
function t=ex1602(N)
x=randn(N,1)*20;%randn
y=randn(N,1)*20;%randn
tic %启动秒表
%z=conv(x,y);
```

```
for i=0:N-1
   z(i+1)=0;
   for j=0:i
      z(i+1)=z(i+1)+x(j+1)*y(i-j+1);
   end
   for j=i+1:N-1
      z(i+1)=z(i+1)+x(j+1)*y(N+i-j+1);
   end
end

t1=toc;%计时
tic;
x1=fft(x,N);
y1=fft(y,N);
z1=ifft(x1.*y1);
t2=toc;
t=[t1,t2];
```

分析：

计算所化时间与使用的计算机性能有关，由于计算机计时器的最小单位较大，对于较新的计算机，即使对于 N=128，所化时间几乎为 0。而且由于卷积采用代码解释执行速度较慢，Fourier 变换采用内部函数速度很快，用 FFT 计算速度要快得多。

3. 用 FFT 计算多项式 $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的乘积，并与 $\frac{\sin 2x}{2}$ 的 Taylor 级数的相应项比较。

解　源程序为

```
function [z,maxerror]=ex1603(m);

% z:乘积，maxerror：最大误差，m：阶数

len=4*m+2;

a=zeros(len,1);%被乘式系数

a(2)=1;

for i=4:2:2*m+2

    a(i)=-1*a(i-2)/(i-2)/(i-1);

end
```

```
b=zeros(len,1);%乘式系数
b(1)=1;
for i=3:2:2*m+1
   b(i)=-1*b(i-2)/(i-2)/(i-1);
end
c=zeros(len,1);%乘积系数
c(2)=1;
for i=4:2:len
   c(i)=-4*c(i-2)/(i-1)/(i-2);
end

x=fft(a,len);%Fourier 变换
y=fft(b,len);%Fourier 变换
z1=x.*y;
z=ifft(z1);%Fourier 逆变换
maxerror=0;
for i=1:len
   e=abs(z(i)-c(i));
   if e>maxerror
      maxerror=e;
   end
end
```

计算结果误差分析：

| m | 误差 |
|---|---|
| 1 | 0.05 |
| 2 | 0.001587 |
| 3 | 2.756e-005 |
| 4 | 3.006e-007 |
| 5 | 2.248e-009 |
| 6 | 1.224e-011 |

随着 m 的增加，误差迅速减少。